Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010

Analysis II
Übung 11

Aufgabe 1

Wir betrachten die Gleichung

$$x^3 + y^2 - 2xy = 0\,.$$

(a) Zeigen Sie, daß man die Gleichung für (x, y) in einer Umgebung von $(1,1)$ eindeutig nach x auflösen kann.

(b) Zeigen Sie, daß die so erhaltene Funktion $x = \varphi(y)$ in $y = 1$ zweimal stetig differenzierbar ist und berechnen Sie $\varphi'(1)$ und $\varphi''(1)$.

(c) Kann man die Gleichung in einer Umgebung von $(1,1)$ eindeutig nach y auflösen?

Lösung. (a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2xy$ ist stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 2x, \quad f(1,1) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1 \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es eine Umgebung U von $y = 1$ und eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(1) = 1$ und $f(\varphi(y), y) = 0$.

(b) Für y nahe bei 1 ergibt sich die Ableitung zu

$$\varphi'(y) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(y), y)}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(y), y)} = -\frac{2y - 2\varphi(y)}{3\varphi(y)^2 - 2y}\,. \tag{1}$$

Insbesondere ist $\varphi'(1) = -\frac{2-2}{3-2} = 0$.

Die Formel für $\varphi'(y)$ drückt die Ableitung in Abhänigkeit von y und $\varphi(y)$ aus. Da $\varphi(y)$ stetig differenzierbar ist, ist somit auch $\varphi'(y)$ stetig differenzierbar. Also ist $\varphi(y)$ zweimal stetig differenzierbar. Die zweite Ableitung ist

$$\varphi''(y) = -\frac{2 - 2\varphi'(y)}{3\varphi(y)^2 - 2\,y} + \frac{2y - 2\varphi(y)}{(3\varphi(y)^2 - 2y)^2}(6\varphi(y)\varphi'(y) - 2)\,.$$

Insbesondere ist $\varphi''(1) = -2$.

(c) Wegen $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0$ können wir den Satz über implizite Funktionen nicht für die Auflösbarkeit nach y benutzen. Wir schreiben die Gleichung $x^3 + y^2 - 2xy = 0$ um zu

$$(y - x)^2 = x^2(1 - x)\,.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist nie negativ, aber die rechte Seite wird negativ für $x > 1$. Deswegen gibt es für $x > 1$ keine Lösung. Für $x = 1$ erhalten wir $(y - x)^2 = 0$, d. h. $y = x = 1$. Für $x < 1$ können wir die Gleichung manuell nach y umformen und erhalten zwei Lösungen

$$y = x \pm x\sqrt{1 - x}\,.$$

Aufgabe 2

Die Van-der-Waals-Gleichung

$$p = \frac{8\,T}{3\,V - 1} - \frac{3}{V^2}$$

beschreibt den Druck $p > 0$ eines Gases in Abhängigkeit seiner Temperatur $T > 0$ und seines Volumens $V > \frac{1}{3}$.

(a) Zeigen Sie, daß $(V_0, T_0, p_0) = (3, 1, \frac{2}{3})$ eine Lösung der Gleichung ist und daß wir die Gleichung in einer Umgebung dieser Lösung eindeutig nach V auflösen können.

(b) Nach (a) können wir V als Funktion von T und p auffassen. Berechnen Sie die Ableitung $\frac{\partial V}{\partial p}(T_0, p_0)$.

Lösung. (a) Die Funktion

$$f(V, T, p) := \frac{8\,T}{3\,V - 1} - \frac{3}{V^2} - p$$

ist stetig differenzierbar. Es ist $f(V_0, T_0, p_0) = 0$ und

$$\frac{\partial f}{\partial V} = -\frac{24T}{(3V-1)^2} + \frac{6}{V^3}\,.$$

Also

$$\frac{\partial f}{\partial V}(3, 1, \tfrac{2}{3}) = -\frac{24}{64} + \frac{6}{27} = -\frac{11}{72} \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen läst sich die Van-der-Waals-Gleichung also in einer Umgebung von (V_0, T_0, p_0) nach V auflösen.

(b) Wegen $\frac{\partial f}{\partial p}(V, T, p) = -1$ gilt nach dem Satz über implizite Funktionen

$$\frac{\partial V}{\partial p}(T, p) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial p}(V(T,p), T, p)}{\frac{\partial f}{\partial V}(V(T,p), T, p)} = \frac{1}{-\frac{24T}{(3V(T,p)-1)^2} + \frac{6}{V(T,p)^3}}\,.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial V}{\partial p}(T_0, p_0) = -\frac{72}{11}\,.$$

Hausaufgaben

Aufgabe 3

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 + 9z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0\,. \end{aligned}$$

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ die Lösungsmenge.

(a) Zeigen Sie, daß es eine Umgebung U des Punktes $(0, 1/\sqrt{13}, -1/\sqrt{13})$ gibt, in der wir das Gleichungssystem nach y und z auflösen können. D. h. es gibt eindeutige Funktionen g_1 und g_2, so daß $(x, g_1(x), g_2(x)) \in S$ liegt.

(b) Berechnen Sie $g_1'(0)$ und $g_2'(0)$.

Lösung. (a) Sei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 1 \\ x + y + z \end{pmatrix}.$$

Um zu zeigen, daß die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung von $(0, 1/\sqrt{13}, -1/\sqrt{13})$ eindeutig nach y und z aufgelöst werden kann, wenden wir den Satz über implizite Funktionen an.

Zunächst gilt $f(0, 1/\sqrt{13}, -1/\sqrt{13}) = 0$. Das Differential ist

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 8y & 18z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da alle partiellen Ableitungen stetig sind, ist f stetig differenzierbar.

Wir müssen zeigen, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8y & 18z \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

für $(x,y,z) = (0, 1/\sqrt{13}, -1/\sqrt{13})$ invertierbar ist. Wegen

$$\det \begin{pmatrix} 8\frac{1}{\sqrt{13}} & -18\frac{1}{\sqrt{13}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{26}{\sqrt{13}} \neq 0$$

ist dies der Fall. Somit gibt es offen Umgebungen $U =]-\delta, \delta[\subseteq \mathbb{R}$ von 0 und $V \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(1/\sqrt{13}, -1/\sqrt{13})$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g = (g_1, g_2) : U \to V$ mit $g(0) = (1/\sqrt{13}, -1/\sqrt{13})$ und $f(x, g_1(x), g_2(x)) = 0$ für alle $-\delta < x < \delta$. Desweiteren ist g die eindeutige Lösung der Gleichung mit $x \in]-\delta, \delta[$ und $(y,z) \in V$.

(b) Sei $h :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$h(x) := f_1(x, g_1(x), g_2(x)) = x^2 + 4(g_1(x))^2 + 9(g_2(x))^2 - 1.$$

Nach Wahl von g_1 und g_2 ist $h(x) = 0$. Also ist h ist differenzierbar mit verschwindender Ableitung

$$h'(x) = 2x + 8g_1(x)g_1'(x) + 18g_2(x)g_2'(x) = 0.$$

Analog folgt aus $f_2(x, g_1(x), g_2(x)) = 0$, daß $1 + g_1'(x) + g_2'(x) = 0$. Lösen wir diese beiden Gleichungen nach g_1' und g_2', erhalten wir

$$g_1'(x) = \frac{-9g_2(x) + x}{9g_2(x) - 4g_1(x)} \quad \text{und} \quad g_2'(x) = \frac{4g_1(x) - x}{9g_2(x) - 4g_1(x)}.$$

Insbesondere ist $g_1'(0) = -9/13$ und $g_2'(0) = -4/13$.

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$f(x,y) = \sin(x+y) + e^{xy} - 1.$$

(a) Zeigen Sie, daß die Gleichung $f(x,y) = 0$ in einer Umgebung von $(0,0)$ eindeutig nach y aufgelöst werden kann.

(b) Zeigen Sie, daß die so erhaltene Funktion $y = \varphi(x)$ in einer Umgebung von 0 zweimal stetig differenzierbar ist.

(c) Berechnen Sie eine Taylor-Entwicklung von φ um 0 bis zur Ordnung 2.

Lösung. (a) Die Funktion f ist stetig differenzierbar mit Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x+y) + ye^{xy} \quad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x+y) + xe^{xy}\,.$$

Wegen $f(0,0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \cos 0 + 0 = 1 \neq 0$, können wir den Satz über implizite Funktionen anwenden. Es folgt, daß $f(x,y) = 0$ in einer Umgebung von $(0,0)$ eindeutig nach y aufgelöst werden kann.

(b) Nach (a) gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi :]-\delta,\delta[\to \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) = 0$ und $f(x,\varphi(x)) = 0$ für alle $x \in]-\delta,\delta[$. Für die Ableitung erhalten wir

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))} = -\frac{\cos(x+\varphi(x)) + \varphi(x)e^{x\varphi(x)}}{\cos(x+\varphi(x)) + xe^{x\varphi(x)}}\,.$$

Da φ stetig differenzierbar ist, folgt aus dieser Gleichung, daß auch φ' stetig differenzierbar ist. Somit ist φ zweimal stetig differenzierbar auf $]-\delta,\delta[$.

(c) Es gilt $\varphi(0) = 0$ und

$$\varphi'(0) = -\frac{\cos(0+\varphi(0)) + \varphi(0)e^{0\varphi(0)}}{\cos(0+\varphi(0)) + 0\cdot e^{0\varphi(0)}} = -1\,.$$

Für die zweite Ableitung betrachten wir die Gleichung

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}\,,$$

die zu $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0$ äquivalent ist. Ableitung mit Hilfe der Kettenregel ergibt

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,\varphi(x))\varphi'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\varphi(x))(\varphi'(x))^2 \\ + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi''(x) = 0.\end{aligned}$$

Für $x = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\varphi''(x) \\ &= -\sin(0) + 0^2\cdot e^0 + 2\sin(0) - (1+0)e^0 - \sin(0) + 0^2\cdot e^0 + \cos(0) + 0\cdot e^0\varphi''(0) \\ &= 0 - 2 - 0 + \varphi''(0)\,.\end{aligned}$$

Also $\varphi''(0) = 2$. Das Taylor-Polynom zweiter Ordnung ist somit

$$T_2(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)\cdot x + \frac{1}{2}\varphi''(0)\cdot x^2 = -x + x^2\,.$$