Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

21.06.2010

10. Übung Analysis II

Sommersemester 2010

(G10.1) (Taylor-Entwicklungen)

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

im Punkt $(1,1)$ bis einschließlich den Gliedern 2. Ordnung.

Lösung.

Es gilt $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} = \frac{x+y-2y}{x+y} = 1 - \frac{2y}{x+y}$ sowie $f(x,y) = \frac{2x-(x+y)}{x+y} = \frac{2x}{x+y} - 1$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
D^{(1,0)}f(x,y) &= \frac{2y}{(x+y)^2}, \\
D^{(0,1)}f(x,y) &= \frac{-2x}{(x+y)^2}, \\
D^{(2,0)}f(x,y) &= \frac{-4y}{(x+y)^3}, \\
D^{(0,2)}f(x,y) &= \frac{4x}{(x+y)^3}, \\
D^{(1,1)}f(x,y) &= \frac{2}{(x+y)^2} - \frac{4y}{(x+y)^3}.
\end{aligned}$$

Am Entwicklungspunkt $(x,y) = (1,1)$ erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
f(1,1) &= 0, \\
D^{(1,0)}f(1,1) &= \frac{1}{2}, \\
D^{(0,1)}f(1,1) &= -\frac{1}{2}, \\
D^{(2,0)}f(1,1) &= -\frac{1}{2}, \\
D^{(0,2)}f(1,1) &= \frac{1}{2}, \\
D^{(1,1)}f(1,1) &= 0.
\end{aligned}$$

Die Glieder der Taylorreihe bis zur 2. Ordnung am Entwicklungspunkt $(1,1)$ sind:

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|\le 2} \frac{D^\alpha f(1,1)}{\alpha!}((x,y)-(1,1))^\alpha &= f(1,1) + D^{(1,0)}f(1,1)(x-1) + D^{(0,1)}f(1,1)(y-1) \\
&\quad + D^{(1,1)}f(1,1)(x-1)(y-1) + \frac{1}{2}D^{(2,0)}f(1,1)(x-1)^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2}D^{(0,2)}f(1,1)(y-1)^2 \\
&= \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2.
\end{aligned}$$

■

(G10.2) (Lokale Extrema)

Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y.$$

Lösung.

Es gilt $D_1 f(x,y) = \frac{1}{x^2} - 4$ und $D_2 f(x,y) = -\frac{1}{y^2} + 1$. Also sind die Punkte $(1/2, 1)$, $(1/2, -1)$, $(-1/2, 1)$, $(-1/2, -1)$ die möglichen Extremstellen von f. Für die Hesse-Matrix gilt

$$(\mathrm{Hess}\, f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2/x^3 & 0 \\ 0 & 2/y^3 \end{pmatrix}.$$

Also sind $(\mathrm{Hess}\, f)(1/2, 1)$ und $(\mathrm{Hess}\, f)(-1/2, -1)$ indefinit und f besitzt in $(1/2, 1)$ und $(-1/2, -1)$ kein lokales Extremum. Die Matrix $(\mathrm{Hess}\, f)(-1/2, 1)$ ist positiv definit und f hat in $(-1/2, 1)$ ein lokales Minimum. Die Matrix $(\mathrm{Hess}\, f)(1/2, -1)$ ist negativ definit und f hat in $(1/2, -1)$ ein lokales Maximum.

■

(G10.3) (Ungleichung für das arithmetische und geometrische Mittel)

Seien $c > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Die Funktion

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot \left(nc - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)}$$

sei für $x_1 \ge 0, \ldots, x_{n-1} \ge 0$ mit

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i \le nc$$

definiert.

(i) Zeigen Sie, dass f ein globales Maximum hat und finden Sie es.

(ii) Benutzen Sie (i), um einen Beweis für die folgende Ungleichung für das arithmetische und das geometrische Mittel zu erhalten:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \quad \text{für alle } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+.$$

Lösung.

(i) Wir setzen

$$K = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : x_1 \geq 0, \ldots, x_{n-1} \geq 0, \sum_{i=1}^{n-1} x_i \leq nc. \right\}$$

Die Menge K ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$ und $f : K \to \mathbb{R}$ ist eine stetige Funktion. Also besitzt f ein globales Maximum. Es gibt also ein $\alpha \in K$ mit $f(x) \leq f(\alpha)$ für jedes $x \in K$. Die Funktion f verschwindet auf dem Rand von K. Da $f(x) \geq 0$ für jedes $x \in K$ gilt, und f nicht die Nullfunktion ist, muss eine Maximalstelle α im Inneren $\mathring{K}$ liegen. Also muss gelten

$$\operatorname{grad}(f|_{\mathring{K}})(\alpha) = 0.$$

Für $k = 1, \ldots, n-1$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_{n-1}) &= \sqrt[n]{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n-1} x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sqrt[n]{x_k} \sqrt[n]{nc - \sum_{i=1}^{n-1} x_i} \right) \\
&= \sqrt[n]{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n-1} x_i} \left(\sqrt[n]{nc - \sum_{i=1}^{n-1} x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sqrt[n]{x_k} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt[n]{x_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sqrt[n]{nc - \sum_{i=1}^{n-1} x_i} \right) \right) \\
&= \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot \left(nc - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right)} \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{nc - \sum_{i=1}^{n-1} x_i} \right) \\
&= \frac{1}{n} f(x_1, \ldots, x_{n-1}) \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{nc - \sum_{i=1}^{n-1} x_i} \right).
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0 &\iff \frac{1}{x_1} = \ldots = \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{1}{nc - \sum_{i=1}^{n-1} x_i} \\
&\iff x_1 = \ldots = x_{n-1} = nc - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \\
&\iff x_1 = \ldots = x_{n-1} = c.
\end{aligned}$$

Also gilt $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = c$ und somit $f(\alpha) = c$. Daraus folgt $f(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leq c$ für alle $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in K$.

(ii) Wir setzen

$$c = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Mit (i) erhalten wir dann $f(a_1, \ldots, a_{n-1}) \leq c$, also

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

■

Hausaufgaben

(H10.4) (Kettenregel)

Es sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ und } y > 0\}$ und $E := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : w > 0\}$. Wir definieren die Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^3$ und $g : E \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) := \big(\log(xy),\ \cos(x^2 + y),\ e^x\big) \quad \text{und} \quad g(u, v, w) := e^u + vw + \log(w).$$

Zeigen Sie, dass $h := g \circ f$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung

(i) nach der Kettenregel,

(ii) direkt durch Ableiten von $h = h(x, y)$.

(H10.5) (Lokale Extrema)

Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1^3 - 12x_1 + x_2^2 + 2.$$

(H10.6) (Extrema auf kompakten Mengen)

Sei $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Bestimmen Sie die globalen und lokalen Extrema der Funktion

$$f : K \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 y.$$

Hinweis: Um die globalen Extrema einer Funktion f auf einer kompakten Teilmenge K von $\mathbb{R}^n$ zu bestimmen, untersucht man die lokalen Extrema auf dem Inneren von K und die lokalen Extrema auf dem Rand von K.