Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

21.06.2010

10. Übung Analysis II
Sommersemester 2010

(G10.1) (Taylor-Entwicklungen)

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

im Punkt $(1,1)$ bis einschließlich den Gliedern 2. Ordnung.

Lösung.

Es gilt $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} = \frac{x+y-2y}{x+y} = 1 - \frac{2y}{x+y}$ sowie $f(x,y) = \frac{2x-(x+y)}{x+y} = \frac{2x}{x+y} - 1$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
D^{(1,0)}f(x,y) &= \frac{2y}{(x+y)^2}, \\
D^{(0,1)}f(x,y) &= \frac{-2x}{(x+y)^2}, \\
D^{(2,0)}f(x,y) &= \frac{-4y}{(x+y)^3}, \\
D^{(0,2)}f(x,y) &= \frac{4x}{(x+y)^3}, \\
D^{(1,1)}f(x,y) &= \frac{2}{(x+y)^2} - \frac{4y}{(x+y)^3}.
\end{aligned}$$

Am Entwicklungspunkt $(x,y) = (1,1)$ erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
f(1,1) &= 0, \\
D^{(1,0)}f(1,1) &= \frac{1}{2}, \\
D^{(0,1)}f(1,1) &= -\frac{1}{2}, \\
D^{(2,0)}f(1,1) &= -\frac{1}{2}, \\
D^{(0,2)}f(1,1) &= \frac{1}{2}, \\
D^{(1,1)}f(1,1) &= 0.
\end{aligned}$$

Die Glieder der Taylorreihe bis zur 2. Ordnung am Entwicklungspunkt $(1,1)$ sind:

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|\le 2} \frac{D^\alpha f(1,1)}{\alpha!}((x,y)-(1,1))^\alpha &= f(1,1) + D^{(1,0)}f(1,1)(x-1) + D^{(0,1)}f(1,1)(y-1) \\
&\quad + D^{(1,1)}f(1,1)(x-1)(y-1) + \frac{1}{2}D^{(2,0)}f(1,1)(x-1)^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2}D^{(0,2)}f(1,1)(y-1)^2 \\
&= \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 .
\end{aligned}$$

■

(G10.2) (Lokale Extrema)

Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y.$$

Lösung.

Es gilt $D_1 f(x,y) = \frac{1}{x^2} - 4$ und $D_2 f(x,y) = -\frac{1}{y^2} + 1$. Also sind die Punkte $(1/2, 1)$, $(1/2, -1)$, $(-1/2, 1)$, $(-1/2, -1)$ die möglichen Extremstellen von f. Für die Hesse-Matrix gilt

$$(\text{Hess}\, f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2/x^3 & 0 \\ 0 & 2/y^3 \end{pmatrix}.$$

Also sind $(\text{Hess}\, f)(1/2, 1)$ und $(\text{Hess}\, f)(-1/2, -1)$ indefinit und f besitzt in $(1/2, 1)$ und $(-1/2, -1)$ kein lokales Extremum. Die Matrix $(\text{Hess}\, f)(-1/2, 1)$ ist positiv definit und f hat in $(-1/2, 1)$ ein lokales Minimum. Die Matrix $(\text{Hess}\, f)(1/2, -1)$ ist negativ definit und f hat in $(1/2, -1)$ ein lokales Maximum.

■

(G10.3) (Ungleichung für das arithmetische und geometrische Mittel)

Seien $c > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Die Funktion

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot \left(nc - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)}$$

sei für $x_1 \ge 0, \ldots, x_{n-1} \ge 0$ mit

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i \le nc$$

definiert.

(i) Zeigen Sie, dass f ein globales Maximum hat und finden Sie es.

(ii) Benutzen Sie (i), um einen Beweis für die folgende Ungleichung für das arithmetische und das geometrische Mittel zu erhalten:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \quad \text{für alle } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+.$$

Lösung.

(i) Wir setzen

$$K = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : x_1 \geq 0, \ldots, x_{n-1} \geq 0, \sum_{i=1}^{n-1} x_i \leq nc. \right\}$$

Die Menge K ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$ und $f : K \to \mathbb{R}$ ist eine stetige Funktion. Also besitzt f ein globales Maximum. Es gibt also ein $\alpha \in K$ mit $f(x) \leq f(\alpha)$ für jedes $x \in K$. Die Funktion f verschwindet auf dem Rand von K. Da $f(x) \geq 0$ für jedes $x \in K$ gilt, und f nicht die Nullfunktion ist, muss eine Maximalstelle α im Inneren $\overset{\circ}{K}$ liegen. Also muss gelten

$$\operatorname{grad}(f|_{\overset{\circ}{K}})(\alpha) = 0.$$

Für $k = 1, \ldots, n-1$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_{n-1}) &= \sqrt[n]{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n-1} x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sqrt[n]{x_k} \sqrt[n]{nc - \sum_{i=1}^{n-1} x_i} \right) \\
&= \sqrt[n]{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n-1} x_i} \left(\sqrt[n]{nc - \sum_{i=1}^{n-1} x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} (\sqrt[n]{x_k}) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt[n]{x_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sqrt[n]{nc - \sum_{i=1}^{n-1} x_i} \right) \right) \\
&= \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot \left(nc - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right)} \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{nc - \sum_{i=1}^{n-1} x_i} \right) \\
&= \frac{1}{n} f(x_1, \ldots, x_{n-1}) \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{nc - \sum_{i=1}^{n-1} x_i} \right).
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0 \quad &\iff \quad \frac{1}{x_1} = \ldots = \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{1}{nc - \sum_{i=1}^{n-1} x_i} \\
&\iff \quad x_1 = \ldots = x_{n-1} = nc - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \\
&\iff \quad x_1 = \ldots = x_{n-1} = c.
\end{aligned}$$

Also gilt $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = c$ und somit $f(\alpha) = c$. Daraus folgt $f(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leq c$ für alle $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in K$.

(ii) Wir setzen

$$c = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Mit (i) erhalten wir dann $f(a_1, \ldots, a_{n-1}) \leq c$, also

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

■

Hausaufgaben

(H10.4) (Kettenregel)

Es sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ und } y > 0\}$ und $E := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : w > 0\}$. Wir definieren die Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^3$ und $g : E \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) := \big(\log(xy),\ \cos(x^2 + y),\ e^x\big) \quad \text{und} \quad g(u, v, w) := e^u + vw + \log(w).$$

Zeigen Sie, dass $h := g \circ f$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung

(i) nach der Kettenregel,

(ii) direkt durch Ableiten von $h = h(x, y)$.

Lösung.

(i) Wir prüfen zunächst alle Voraussetzungen der Kettenregel. Als Komposition differenzierbarer Abbildungen ist f offensichtlich für alle $(x, y) \in D$ differenzierbar. Außerdem ist $f(D) \subseteq E$, denn f geht nach $\mathbb{R}^3$ und es gilt $f_3(x, y) = e^x > 0$ für alle $(x, y) \in D$. Schließlich ist g in allen Punkten aus E differenzierbar. Nach der Kettenregel ist also die Funktion $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$D(g \circ f)(x, y) \quad = \quad Dg(f(x, y)) \cdot Df(x, y).$$

Nun ist

$$Dg(u,v,w) = \Big(e^u, \quad w, \quad v + 1/w\Big),$$

d.h. wir haben

$$Dg(f(x,y)) = \Big(xy, \quad e^x, \quad \cos(x^2+y) + e^{-x}\Big)$$

und damit

$$\begin{aligned} D(g\circ f)(x,y) &= Dg(f(x,y)) \cdot \begin{pmatrix} 1/x & 1/y \\ -2x\sin(x^2+y) & -\sin(x^2+y) \\ e^x & 0 \end{pmatrix} \\ &= \Big(y - 2xe^x\sin(x^2+y) + e^x\cos(x^2+y) + 1, \quad x - e^x\sin(x^2+y)\Big). \end{aligned}$$

(ii) Es gilt für alle $(x,y) \in D$ die Identität

$$\begin{aligned} h(x,y) &= g(f(x,y)) = \mathrm{e}^{f_1(x,y)} + f_2(x,y)\cdot f_3(x,y) + \log(f_3(x,y)) \\ &= xy + \cos(x^2+y^2)\cdot \mathrm{e}^x + x. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$Dh(x,y) = \Big(y - 2x\sin(x^2+y)\mathrm{e}^x + \cos(x^2+y)\mathrm{e}^x + 1, \quad x - \sin(x^2+y)\mathrm{e}^x\Big).$$

■

(H10.5) (Lokale Extrema)

Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2) = x_1^3 - 12x_1 + x_2^2 + 2.$$

Lösung.

Die Funktion f ist zweimal stetig partiell differenzierbar und für $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 12, & 2x_2 \end{pmatrix}, \quad (\operatorname{Hess} f)(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aus der Bedingung $\operatorname{grad} f(x) = 0$ sehen wir, dass $(-2,0)$ und $(2,0)$ die einzigen möglichen Extremstellen sind.

Die Matrix $(\operatorname{Hess} f)(2,0)$ ist positiv definit, da $12 > 0$ und

$$\det\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 24 > 0.$$

Also besitzt f in $(2,0)$ ein striktes lokales Minimum.

Wir werden jetzt zeigen, dass $A := (\operatorname{Hess} f)(-2,0)$ indefinit ist. Daraus folgt dann, dass f in $(-2,0)$ kein lokales Extremum besitzt. Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und somit $\langle x, Ax\rangle = -12x_1^2 + 2x_2^2$. Mit $x_1 > 0$ und $x_2 = 0$ erhalten wir $\langle x, Ax\rangle < 0$ und mit $x_1 = 0$ und $x_2 > 0$ erhalten wir $\langle x, Ax\rangle > 0$.

■

(H10.6) (Extrema auf kompakten Mengen)

Sei $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$. Bestimmen Sie die globalen und lokalen Extrema der Funktion

$$f : K \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2y.$$

Hinweis: Um die globalen Extrema einer Funktion f auf einer kompakten Teilmenge K von $\mathbb{R}^n$ zu bestimmen, untersucht man die lokalen Extrema auf dem Inneren von K und die lokalen Extrema auf dem Rand von K.

Lösung.

Wir bemerken, dass f ihr Maximum und Minimum annimmt, da K kompakt und f stetig ist.

Zunächst bestimmen wir die lokalen Extrema der Funktion $\tilde f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \tilde f(x,y) = x^2y$. Lokale Extremstellen dieser Funktion, die sich in K befinden, sind auch lokale Extremstellen von f.

Es gilt $\operatorname{grad} \tilde f(x,y) = (2xy, \ x^2)$. Also gilt $\operatorname{grad} \tilde f(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$. Die Hesse-Matrix bei $(0,y)$ ist

$$(\operatorname{Hess} \tilde f)(0,y) = \begin{pmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Determinante dieser Matrix Null ist, hilft sie nicht bei der Bestimmung der Extremstellen.

Falls $y > 0$ gilt $\tilde f(x,y) = x^2y \ge 0$ für alle x, so $\tilde f(x,y) \ge \tilde f(0,y) = 0$ für alle x. Wir schließen daraus, dass $\tilde f$ für alle $y > 0$ an der Stelle $(0,y)$ ein lokales Minimum besitzt und für alle $y < 0$ an der Stelle $(0,y)$ ein lokales Maximum. Weitere lokale Extrema von $\tilde f$ liegen nicht vor. Somit haben wir folgende lokalen Extremstellen von f gefunden: Lokale Minima: $\{0\}\times]0,1]$. Lokale Maxima: $\{0\} \times [-1,0[$. Weitere lokale Extremstellen könnten sich auf dem Rand von K befinden.

Wir betrachten nun den Rand der Menge K, der durch $x^2 + y^2 = 1$ definiert ist. Indem wir $x^2 = 1 - y^2$ substituieren, erhalten wir eine Funktion $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(y) = (1-y^2)y = y - y^3, \quad y \in [-1,1].$$

Es gilt $g'(y) = 0$ genau dann, wenn $y = \pm 1/\sqrt{3}$. Weiterhin haben wir $g''(1/\sqrt{3}) < 0$, $g''(-1/\sqrt{3}) > 0$. Außerdem nimmt die Funktion g an dem Randpunkt -1 ein lokales Maximum $g(-1) = 0$ und an dem Randpunkt 1 ein lokales Minimum $g(1) = 0$ an. Wir schließen, dass g sein Maximum $2/(3\sqrt{3})$ an der Stelle $y = 1/\sqrt{3}$ und sein Minimum $-2/(3\sqrt{3})$ an der Stelle $y = -1/\sqrt{3}$ annimmt. Die lokalen Extremstellen von f, die von $y = \pm 1$ herkommen, haben wir oben schon gefunden. Da der Wert $g(1/\sqrt{3}) = 2/(3\sqrt{3})$

größer ist als der Wert 0 des lokalen Maximums von $\tilde{f}$, handelt es sich um den Maximalwert der Funktion f. Ebenso argumentiert man für die Minima.

Die Funktion f nimmt also ihr globales Maximum $2/(3\sqrt{3})$ an den Stellen

$$M_1 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \, M_2 = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

an. Ihr globales Minimum $-2/(3\sqrt{3})$ nimmt sie an den Stellen

$$m_1 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \, m_2 = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

an.

■