



Analysis II

Übung 9

Aufgabe 1

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex (d. h. $x, y \in U$ impliziert $x + t(y - x) \in U$ für alle $t \in [0, 1]$). Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar mit

$$\|Df(x)\|_{\mathbb{E}} \leq K \quad \text{für alle } x \in U.$$

Zeigen Sie, daß f Lipschitz mit Lipschitz-Konstanten K ist.

Lösung. Nach dem Corollar zu §6 Satz 5 ist

$$\|f(y) - f(x)\|_{\mathbb{E}} \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(x + t(y - x))\|_{\mathbb{E}} \cdot \|y - x\|_{\mathbb{E}} \leq K \cdot \|y - x\|_{\mathbb{E}}.$$

Aufgabe 2

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [0, 1] \rightarrow U$ stetig differenzierbare Funktionen mit $x := \gamma(0)$ und $y := \gamma(1)$. Zeigen Sie, daß

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 Df(\gamma(t)) D\gamma(t) dt$$

Lösung. Wir wenden den Fundamentalsatz auf die i -te Komponente an und erhalten mit der Kettenregel

$$f_i(y) = f_i(x) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f_i(\gamma(t)) dt = f_i(x) + \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^n D_k f_i(\gamma(t)) \cdot \frac{d}{dt} \gamma_k(t) \right] dt.$$

Aufgabe 3

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, daß die Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \sin(\|f(x)\|_{\mathbb{E}}^2)$$

ebenfalls stetig differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

Lösung. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \|x\|_{\mathbb{E}}^2 = \frac{\partial}{\partial x_i} (x_1^2 + \dots + x_n^2) = 2x_i.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} Dg(x) &= \cos(\|f(x)\|_{\mathbb{E}}^2) (2f_1(x), \dots, 2f_n(x)) Df(x) \\ &= 2 \cos(\|f(x)\|_{\mathbb{E}}^2) (\sum_{i=1}^n f_i(x) D_1 f_i(x), \dots, \sum_{i=1}^n f_i(x) D_n f_i(x)). \end{aligned}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y \sin\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, daß f in jedem Punkt partiell differenzierbar ist und berechnen Sie die partiellen Ableitungen.
- (b) Zeigen Sie, daß $D_1 f$ in keinem Punkt der Form $(0, y)$ mit $y \neq 0$ stetig ist.
Hinweis. Betrachten Sie die Punkte $(x_n, y_n) = (y/(n\pi), y)$.
- (c) Ist f differenzierbar in $(0, y)$ mit $y \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 5

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $f : \overline{X \times Y} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $X \times Y$ differenzierbar ist. Sei $\mu : X \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion mit $\mu(x) := \min_{y \in \overline{Y}} f(x, y)$. Angenommen, es gibt eine stetig differenzierbare Funktion $\xi : X \rightarrow Y$ mit

$$f(x, \xi(x)) = \mu(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Berechnen Sie das Differential von μ .