Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010

Analysis II
Übung 9

Aufgabe 1

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex (d. h. $x, y \in U$ impliziert $x + t(y - x) \in U$ für alle $t \in [0,1]$). Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar mit

$$\|Df(x)\|_{\mathrm{E}} \leq K \quad \text{für alle } x \in U\,.$$

Zeigen Sie, daß f Lipschitz mit Lipschitz-Konstanten K ist.
Lösung. Nach dem Corollar zu §6 Satz 5 ist

$$\|f(y) - f(x)\|_{\mathrm{E}} \leq \sup_{0\leq t\leq 1} \|Df(x + t(y - x))\|_{\mathrm{E}} \cdot \|y - x\|_{\mathrm{E}} \leq K \cdot \|y - x\|_{\mathrm{E}}\,.$$

Aufgabe 2

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f = (f_1, \dots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ und $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [0,1] \to U$ stetig differenzierbare Funktionen mit $x := \gamma(0)$ und $y := \gamma(1)$. Zeigen Sie, daß

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 Df(\gamma(t))D\gamma(t)\,\mathrm{d}t$$

Lösung. Wir wenden den Fundamentalsatz auf die i-te Komponente an und erhalten mit der Kettenregel

$$f_i(y) = f_i(x) + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_i(\gamma(t))\,\mathrm{d}t = f_i(x) + \int_0^1 \Big[\sum_{k=1}^n D_k f_i(\gamma(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_k(t)\Big]\,\mathrm{d}t\,.$$

Aufgabe 3

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, daß die Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \sin(\|f(x)\|_{\mathrm{E}}^2)$$

ebenfalls stetig differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.
Lösung. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\|x\|_{\mathrm{E}}^2 = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_1^2 + \dots + x_n^2) = 2x_i\,.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} Dg(x) &= \cos(\|f(x)\|_{\mathrm{E}}^2)\big(2f_1(x), \dots, 2f_n(x)\big)Df(x) \\ &= 2\cos(\|f(x)\|_{\mathrm{E}}^2)\big(\textstyle\sum_{i=1}^n f_i(x)D_1 f_i(x), \dots, \sum_{i=1}^n f_i(x)D_n f_i(x)\big)\,. \end{aligned}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \sin(\frac{y}{x}) & \text{für } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,. \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, daß f in jedem Punkt partiell differenzierbar ist und berechnen Sie die partiellen Ableitungen.

(b) Zeigen Sie, daß $D_1 f$ in keinem Punkt der Form $(0, y)$ mit $y \neq 0$ stetig ist.

Hinweis. Betrachten Sie die Punkte $(x_n, y_n) = (y/(n\pi), y)$.

(c) Ist f differenzierbar in $(0, y)$ mit $y \in \mathbb{R}$?

Lösung. (a) Für $x \neq 0$ ist

$$D_1 f(x, y) = 2xy \sin(\frac{y}{x}) - y^2 \cos(\frac{y}{x}),$$
$$D_2 f(x, y) = x^2 \sin(\frac{y}{x}) + xy \cos(\frac{y}{x}).$$

Für $x = 0$ ist

$$D_1 f(0, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 y \sin(\frac{y}{h})}{h} = 0,$$
$$D_2 f(0, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, y + h) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

(b) Sei $(x_n, y_n) := (y/(n\pi), y)$ Dann ist $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0, y)$ und

$$D_1 f(x_n, y_n) = 2\frac{y^2}{n\pi} \sin(n\pi) - y^2 \cos(n\pi).$$

Also existiert $\lim_{n\to\infty} D_1 f(x_n, y_n)$ nicht und $D_1 f$ ist nicht in $(0, y)$ stetig.

(c) Sei $y \in \mathbb{R}$. Dann ist $D_1 f(0, y) = D_2 f(0, y) = 0$. Nach §6 Satz 1 folgt, daß f genau dann in $(0, y)$ differenzierbar ist, wenn gilt

$$f(\xi, y + \eta) = f(0, y) + o(\|(\xi, \eta)\|_{\mathrm{E}}).$$

Wir müssen also zeigen, daß

$$\frac{f(\xi, y + \eta) - f(0, y)}{\|(\xi, \eta)\|_{\mathrm{E}}}$$

für $(\xi, \eta) \to (0, 0)$ gegen 0 strebt. Es gilt

$$\left| \frac{f(\xi, y + \eta) - f(0, y)}{\|(\xi, \eta)\|_{\mathrm{E}}} \right| = \left| \frac{\xi^2 (y + \eta) \sin(\frac{y+\eta}{\xi})}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right| \leq \left| \frac{\xi^2 (y + \eta)}{\sqrt{\xi^2}} \right| \leq |\xi(y + \eta)|$$

Dies geht gegen 0 für $\xi \to 0$. Also ist f in $(0, y)$ differenzierbar.

Aufgabe 5

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $f : \overline{X \times Y} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $X \times Y$ differenzierbar ist. Sei $\mu : X \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $\mu(x) := \min_{y \in \overline{Y}} f(x, y)$. Angenommen, es gibt eine stetig differenzierbare Funktion $\xi : X \to Y$ mit

$$f(x, \xi(x)) = \mu(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Berechnen Sie das Differential von μ.

Lösung. Sei $g : X \to \mathbb{R}^{k+n}$ die Funktion mit $g(x) := (x, \xi(x))$. Dann ist $\mu = f \circ g$ und

$$
\begin{aligned}
D\mu(x) &= Df(g(x))Dg(x) \\
&= (D_1 f(g(x)), \dots, D_k f(g(x)), D_{k+1} f(g(x)), \dots, D_{k+n} f(g(x))) \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ D_1\xi_1(x) & \cdots & \cdots & D_k\xi_1(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_1\xi_n(x) & \cdots & \cdots & D_k\xi_n(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} D_1 f(g(x)) + D_{k+1} f(g(x)) D_1\xi_1(x) + \cdots + D_{k+n} f(g(x)) D_1\xi_n(x) \\ \vdots \\ D_k f(g(x)) + D_{k+1} f(g(x)) D_k\xi_1(x) + \cdots + D_{k+n} f(g(x)) D_k\xi_n(x) \end{pmatrix}^{\top}
\end{aligned}
$$