Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

07.06.2010

8. Übung Analysis II
Sommersemester 2010

(G8.1) (Höhere Ableitungen und der Satz von Schwarz)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass f stetig partiell differenzierbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass f zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber

$$D_1D_2f(0,0) \neq D_2D_1f(0,0).$$

(Vgl. § 5 Satz 1 aus Forster, *Analysis 2*.)

Lösung.

(i) Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$D_1f(x,y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}, \quad D_2f(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Somit sind die partielle Ableitungen D_1f und D_2f stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Weiter gilt

$$D_1f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h-0} = 0 \quad \text{und} \quad D_2f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h-0} = 0.$$

Sei nun $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $(x_n,y_n) \neq (0,0)$ und $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (0,0)$. Es gilt

$$\begin{aligned} |D_1f(x_n,y_n)| &= \left| \frac{x_n^4y_n + 4x_n^2y_n^3 - y_n^5}{x_n^4 + 2x_n^2y_n^2 + y_n^4} \right| \\ &\leq \left| \frac{x_n^4y_n}{x_n^4 + 2x_n^2y_n^2 + y_n^4} \right| + \left| \frac{4x_n^2y_n^3}{x_n^4 + 2x_n^2y_n^2 + y_n^4} \right| + \left| \frac{y_n^5}{x_n^4 + 2x_n^2y_n^2 + y_n^4} \right| \\ &\leq \left| \frac{x_n^4y_n}{x_n^4} \right| + \left| \frac{4x_n^2y_n^3}{2x_n^2y_n^2} \right| + \left| \frac{y_n^5}{y_n^4} \right| \\ &= |y_n| + 2|y_n| + |y_n| = 4|y_n| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

also ist D_1f stetig im Punkt $(0,0)$. Auf die gleiche Weise zeigen wir, dass D_2f im Punkt $(0,0)$ stetig ist. Somit ist f stetig partiell differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$.

(ii) Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \neq (0,0)$. Es gilt

$$D_2D_1f(x,y) = \frac{(x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4)(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)2y(x^4y + 4x^2y^3 - y^5)}{(x^2+y^2)^4}$$

und

$$D_1D_2f(x,y) = \frac{(5x^4 - 12x^2y^2 - y^4)(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)2x(x^5 - 4x^3y^2 - xy^4)}{(x^2+y^2)^4}.$$

Somit existieren D_2D_1f und D_1D_2f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Weiter gilt

$$D_2D_1f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_1f(0,h) - D_1f(0,0)}{h} = \frac{\frac{-h^5}{h^4}}{h} = -1$$

und

$$D_1D_2f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_2f(h,0) - D_2f(0,0)}{h} = \frac{\frac{h^5}{h^4}}{h} = 1.$$

Somit ist f zweimal partiell differenzierbar und $D_2D_1f(0,0) \neq D_1D_2f(0,0)$.

■

(G8.2) (Der Laplace-Operator)

Sei $c > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $\omega = \|a\|_2\, c$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Man zeige: Die Funktion

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F(x,t) = f(\langle a,x\rangle - \omega t),$$

(wobei $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i$) ist eine Lösung der Wellengleichung

$$\Delta F - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0.$$

Dabei wirkt der Laplace-Operator auf F als Funktion des Ortes $x \in \mathbb{R}^n$, d. h.

$$\Delta F(x,t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x,t).$$

Lösung.

Setzen wir $a = (a_1, \ldots, a_n)$, so ist

$$F(x,t) = f(\langle a,x\rangle - \omega t) = f(\langle a,x\rangle - \|a\|_2\, ct) = f\left(\left(\sum_{i=1}^n a_ix_i\right) - \|a\|_2\, ct\right).$$

Für $i = 1, \ldots, n$ gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,t) = f'(\langle a, x\rangle - \|a\|_2\, ct) \cdot a_i,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x,t) = f''(\langle a, x\rangle - \|a\|_2\, ct) \cdot a_i^2.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \Delta F(x,t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x,t) \\ &= f''(\langle a, x\rangle - \|a\|_2\, ct) \sum_{i=1}^n a_i^2 \\ &= \|a\|_2^2\, f''(\langle a, x\rangle - \|a\|_2\, ct). \end{aligned}$$

Ferner gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = f'(\langle a, x\rangle - \|a\|_2\, ct) \cdot (-\|a\|_2\, c),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x,t) = f''(\langle a, x\rangle - \|a\|_2\, ct) \cdot (-\|a\|_2\, c)^2 = \|a\|_2^2\, c^2 \cdot f''(\langle a, x\rangle - \|a\|_2\, ct).$$

Also ist

$$c^2 \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.$$

■

Hausaufgaben

(H8.3) (Eine nicht rektifizierbare Kurve)

Wir definieren die Kurve $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} (0,0) & \text{falls } t = 0, \\ (t, t^2 \cos(\frac{\pi}{t^2})) & \text{falls } t \neq 0. \end{cases}$$

Man zeige:

(i) Die Kurve γ ist differenzierbar.

(ii) Die Ableitung $\gamma' = (\gamma_1', \gamma_2')$ ist stetig auf $]0,1]$, nicht aber auf ganz $[0,1]$.

(iii) Für die Partition $t_0 = 0 < t_1 = \frac{1}{\sqrt{m}} < t_2 = \frac{1}{\sqrt{m-1}} < \ldots < t_{m-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} < t_m = 1$ gilt

$$p_\gamma(t_0, \ldots, t_m) = \sum_{j=1}^m \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 > 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}.$$

(iv) Die Kurve γ ist nicht rektifizierbar.

(H8.4) (Stetigkeit)

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Wir wollen das Verhalten von $f(x,y)$ untersuchen, wenn (x,y) entlang einer Geraden gegen $(0,0)$ konvergiert. Man berechne dazu $\lim_{y\to 0} f(0,y)$ und $\lim_{x\to 0} f(x,ax)$, für $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Ist f im Punkt $(0,0)$ stetig? (Vgl. Tutorium 6 Aufgabe 1.)