Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

07.06.2010

8. Übung Analysis II
Sommersemester 2010

(G8.1) (Höhere Ableitungen und der Satz von Schwarz)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass f stetig partiell differenzierbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass f zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber

$$D_1 D_2 f(0,0) \neq D_2 D_1 f(0,0).$$

(Vgl. § 5 Satz 1 aus Forster, *Analysis 2*.)

Lösung.

(i) Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$D_1 f(x,y) = \frac{x^4 y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}, \quad D_2 f(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Somit sind die partielle Ableitungen $D_1 f$ und $D_2 f$ stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Weiter gilt

$$D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h-0} = 0 \quad \text{und} \quad D_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h-0} = 0.$$

Sei nun $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $(x_n,y_n) \neq (0,0)$ und $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (0,0)$. Es gilt

$$\begin{aligned} |D_1 f(x_n,y_n)| &= \left| \frac{x_n^4 y_n + 4x_n^2 y_n^3 - y_n^5}{x_n^4 + 2x_n^2y_n^2 + y_n^4} \right| \\ &\leq \left| \frac{x_n^4 y_n}{x_n^4 + 2x_n^2y_n^2 + y_n^4} \right| + \left| \frac{4x_n^2 y_n^3}{x_n^4 + 2x_n^2y_n^2 + y_n^4} \right| + \left| \frac{y_n^5}{x_n^4 + 2x_n^2y_n^2 + y_n^4} \right| \\ &\leq \left| \frac{x_n^4 y_n}{x_n^4} \right| + \left| \frac{4x_n^2 y_n^3}{2x_n^2 y_n^2} \right| + \left| \frac{y_n^5}{y_n^4} \right| \\ &= |y_n| + 2|y_n| + |y_n| = 4|y_n| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

also ist $D_1 f$ stetig im Punkt $(0,0)$. Auf die gleiche Weise zeigen wir, dass $D_2 f$ im Punkt $(0,0)$ stetig ist. Somit ist f stetig partiell differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$.

(ii) Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \neq (0,0)$. Es gilt

$$D_2 D_1 f(x,y) = \frac{(x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4)(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)2y(x^4y + 4x^2y^3 - y^5)}{(x^2+y^2)^4}$$

und

$$D_1 D_2 f(x,y) = \frac{(5x^4 - 12x^2y^2 - y^4)(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)2x(x^5 - 4x^3y^2 - xy^4)}{(x^2+y^2)^4}.$$

Somit existieren $D_2 D_1 f$ und $D_1 D_2 f$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Weiter gilt

$$D_2 D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_1 f(0,h) - D_1 f(0,0)}{h} = \frac{\frac{-h^5}{h^4}}{h} = -1$$

und

$$D_1 D_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_2 f(h,0) - D_2 f(0,0)}{h} = \frac{\frac{h^5}{h^4}}{h} = 1.$$

Somit ist f zweimal partiell differenzierbar und $D_2 D_1 f(0,0) \neq D_1 D_2 f(0,0)$.

■

(G8.2) (Der Laplace-Operator)

Sei $c > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $\omega = \|a\|_2 c$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Man zeige: Die Funktion

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F(x,t) = f(\langle a, x\rangle - \omega t),$$

(wobei $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$) ist eine Lösung der Wellengleichung

$$\Delta F - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0.$$

Dabei wirkt der Laplace-Operator auf F als Funktion des Ortes $x \in \mathbb{R}^n$, d. h.

$$\Delta F(x,t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x,t).$$

Lösung.

Setzen wir $a = (a_1, \ldots, a_n)$, so ist

$$F(x,t) = f(\langle a, x\rangle - \omega t) = f(\langle a, x\rangle - \|a\|_2\, ct) = f\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right) - \|a\|_2\, ct \right).$$

Für $i = 1, \ldots, n$ gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,t) = f'(\langle a, x\rangle - \|a\|_2\, ct) \cdot a_i,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x,t) = f''(\langle a, x\rangle - \|a\|_2\, ct) \cdot a_i^2.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \Delta F(x,t) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x,t) \\ &= f''(\langle a, x\rangle - \|a\|_2\, ct) \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \\ &= \|a\|_2^2\, f''(\langle a, x\rangle - \|a\|_2\, ct). \end{aligned}$$

Ferner gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = f'(\langle a, x\rangle - \|a\|_2\, ct) \cdot (-\|a\|_2\, c),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x,t) = f''(\langle a, x\rangle - \|a\|_2\, ct) \cdot (-\|a\|_2\, c)^2 = \|a\|_2^2\, c^2 \cdot f''(\langle a, x\rangle - \|a\|_2\, ct).$$

Also ist

$$c^2 \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.$$

■

Hausaufgaben

(H8.3) (Eine nicht rektifizierbare Kurve)

Wir definieren die Kurve $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} (0,0) & \text{falls } t = 0, \\ (t, t^2 \cos(\frac{\pi}{t^2})) & \text{falls } t \neq 0. \end{cases}$$

Man zeige:

(i) Die Kurve γ ist differenzierbar.

(ii) Die Ableitung $\gamma' = (\gamma_1', \gamma_2')$ ist stetig auf $]0,1]$, nicht aber auf ganz $[0,1]$.

(iii) Für die Partition $t_0 = 0 < t_1 = \frac{1}{\sqrt{m}} < t_2 = \frac{1}{\sqrt{m-1}} < \ldots < t_{m-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} < t_m = 1$ gilt

$$p_\gamma(t_0, \ldots, t_m) = \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 > 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}.$$

(iv) Die Kurve γ ist nicht rektifizierbar.

Lösung.

(i) Es ist klar, dass γ auf $]0,1]$ differenzierbar ist. Weiter ist γ_1 differenzierbar in 0. Aus

$$\lim_{t\to 0} \left| \frac{\gamma_2(t) - \gamma_2(0)}{t} \right| = \lim_{t \to 0} \left| t \cos \frac{\pi}{t^2} \right| \leq \lim_{t\to 0} |t| = 0$$

folgt, dass auch γ_2 in 0 differenzierbar ist. Somit ist γ differenzierbar auf $[0,1]$.

(ii) Es gilt

$$\gamma'(t) = \begin{cases} (1,0) & \text{falls } t = 0, \\ (1, 2t\cos(\frac{\pi}{t^2}) + \frac{2\pi}{t}\sin(\frac{\pi}{t^2})) & \text{falls } t \neq 0, \end{cases}$$

somit ist γ' stetig auf $]0,1]$. Um zu zeigen, dass γ_2' in $t = 0$ unstetig ist, betrachten wir die Nullfolge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \gamma_2'(t_n) &= 2\sqrt{\frac{2}{2n+1}} \cos\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) + \sqrt{2}\pi\sqrt{2n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) \\ &= \pi\sqrt{4n+2} \cdot (-1)^n. \end{aligned}$$

Somit existiert $\lim_{n\to\infty} \gamma_2'(t_n)$ nicht.

(iii) Sei $s_j := t_{m-j}$ für $0 \leq j \leq m$. Es gilt

$$\begin{aligned} p_\gamma(t_0, \ldots, t_m) &= \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 \\ &= \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(s_j) - \gamma(s_{j-1})\|_2 \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sqrt{(\gamma_1(s_j) - \gamma_1(s_{j-1}))^2 + (\gamma_2(s_j) - \gamma_2(s_{j-1}))^2} \\ &\geq \sum_{j=1}^{m} \sqrt{(\gamma_2(s_j) - \gamma_2(s_{j-1}))^2} \\ &= \sum_{j=1}^{m} |\gamma_2(s_j) - \gamma_2(s_{j-1})| \\ &\geq \sum_{j=2}^{m} \left| \frac{1}{j}\cos(\pi j) - \frac{1}{j-1}\cos(\pi(j-1)) \right| \\ &= \sum_{j=2}^{m} \left| \frac{(-1)^j}{j} - \frac{(-1)^{j-1}}{j-1} \right| \\ &= \sum_{j=2}^{m} \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{j-1} \right) \geq \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}. \end{aligned}$$

(iv) Folgt aus (iii), da die harmonische Reihe divergent ist.

∎

(H8.4) (Stetigkeit)

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Wir wollen das Verhalten von $f(x,y)$ untersuchen, wenn (x,y) entlang einer Geraden gegen $(0,0)$ konvergiert. Man berechne dazu $\lim_{y\to 0} f(0,y)$ und $\lim_{x\to 0} f(x,ax)$, für $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Ist f im Punkt $(0,0)$ stetig? (Vgl. Tutorium 6 Aufgabe 1.)

Lösung.

(i) Es gilt $\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$. Sei $a \in \mathbb{R}$. Falls $a = 0$ gilt $\lim_{x\to 0} f(x,ax) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$. Falls $a \neq 0$ gilt

$$f(x,ax) = \frac{2ax^3}{x^4 + a^2x^2} = \frac{2ax}{x^2+a^2} \xrightarrow{x\to 0} 0.$$

(ii) Die Funktion f ist im Punkt $(0,0)$ nicht stetig: Für alle $x \neq 0$ gilt

$$f(x,x^2) = \frac{2x^4}{x^4+x^4} = 1,$$

somit gilt $\lim_{x\to 0}(x,x^2) = (0,0)$ und

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = 1 \neq 0 = f(0,0).$$

∎