Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010

Analysis II
Übung 7

Aufgabe 1

Sei $\mathbb{K}$ gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^n$. Zeigen Sie, daß die Funktion $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|$ stetig ist, wenn wir $\mathbb{K}^n$ mit der Metrik

$$d(x, y) := \|y - x\|_{\max}$$

ausstatten.

Lösung. Sei $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der i-te Standardbasisvektor. Wir setzen $c := \|e_1\| + \dots + \|e_n\|$. Dann ist $c \geq \|e_1\| > 0$ und für $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ folgt

$$\begin{aligned} \big|\|x\| - \|y\|\big| &\leq \|x - y\| = \|(x_1 - y_1)e_1 + \dots + (x_n - y_n)e_n\| \\ &\leq |x_1 - y_1| \cdot \|e_1\| + \dots + |x_n - y_n| \cdot \|e_n\| \\ &\leq \|x - y\|_{\max} \cdot (\|e_1\| + \dots + \|e_n\|) \\ &= c\|x - y\|_{\max} . \end{aligned}$$

Also ist f Lipschitz mit Lipschitz-Konstante c. Hieraus folgt die Stetigkeit von f.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, daß jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig ist, wenn wir $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ mit der Maximums-Norm $\|\cdot\|_{\max}$ ausstatten.

Lösung. Sei $A = (a_{ij})$ die Matrix zu f. Dann gilt

$$f(x_1, \dots, x_m) = \Big(\textstyle\sum_{j=1}^m a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{nj}x_j\Big) .$$

Sei $c := \max\{\, |a_{ij}| \mid i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m \,\}$. Für $x = (x_1, \dots, x_m)$ und $y = (y_1, \dots, y_m)$ gilt

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|_{\max} &= \Big\|\Big(\textstyle\sum_{j=1}^m a_{1j}(x_j - y_j), \dots, \sum_{j=1}^m a_{nj}(x_j - y_j)\Big)\Big\|_{\max} \\ &= \max\Big\{\, \Big|\textstyle\sum_{j=1}^m a_{ij}(x_j - y_j)\Big| \;\Big|\; i = 1, \dots, n \,\Big\} \\ &\leq \max\Big\{\, \textstyle\sum_{j=1}^m |a_{ij}| \cdot |x_j - y_j| \;\Big|\; i = 1, \dots, n \,\Big\} \\ &\leq m \cdot \max\{\, |a_{ij}| \mid i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m \,\} \cdot \max\{\, |x_j - y_j| \mid j = 1, \dots, m \,\} \\ &\leq mc \cdot \|x - y\|_{\max} . \end{aligned}$$

Also ist f Lipschitz mit Lipschitz-Konstante mc. Hieraus folgt die Stetigkeit von f.

Hausaufgaben

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{K}$ gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^n$ äquivalent zur euklidischen Norm $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$ ist.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Bogenlänge folgender Kurven $f : I \to \mathbb{R}^2$.

(a) $f(t) := (t^3, \frac{3}{2}t^2)$ für $I = [a, b]$ mit $0 < a < b$.

(b) $f(t) := ((1 + \cos t)\cos t, (1 + \cos t)\sin t)$ für $I = [0, 2\pi]$.