Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010

Analysis II
Übung 7

Aufgabe 1

Sei $\mathbb{K}$ gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^n$. Zeigen Sie, daß die Funktion $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|$ stetig ist, wenn wir $\mathbb{K}^n$ mit der Metrik

$$d(x, y) := \|y - x\|_{\max}$$

ausstatten.
Lösung. Sei $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der i-te Standardbasisvektor. Wir setzen $c := \|e_1\| + \dots + \|e_n\|$. Dann ist $c \geq \|e_1\| > 0$ und für $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ folgt

$$\begin{aligned} |\|x\| - \|y\|| &\leq \|x - y\| = \|(x_1 - y_1)e_1 + \dots + (x_n - y_n)e_n\| \\ &\leq |x_1 - y_1| \cdot \|e_1\| + \dots + |x_n - y_n| \cdot \|e_n\| \\ &\leq \|x - y\|_{\max} \cdot (\|e_1\| + \dots + \|e_n\|) \\ &= c\|x - y\|_{\max} . \end{aligned}$$

Also ist f Lipschitz mit Lipschitz-Konstante c. Hieraus folgt die Stetigkeit von f.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, daß jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig ist, wenn wir $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ mit der Maximums-Norm $\|\cdot\|_{\max}$ ausstatten.
Lösung. Sei $A = (a_{ij})$ die Matrix zu f. Dann gilt

$$f(x_1, \dots, x_m) = \left(\sum_{j=1}^m a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{nj}x_j\right).$$

Sei $c := \max\{\, |a_{ij}| \mid i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m \,\}$. Für $x = (x_1, \dots, x_m)$ und $y = (y_1, \dots, y_m)$ gilt

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|_{\max} &= \left\|\left(\sum_{j=1}^m a_{1j}(x_j - y_j), \dots, \sum_{j=1}^m a_{nj}(x_j - y_j)\right)\right\|_{\max} \\ &= \max\left\{\, \left|\sum_{j=1}^m a_{ij}(x_j - y_j)\right| \;\middle|\; i = 1, \dots, n \,\right\} \\ &\leq \max\left\{\, \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \cdot |x_j - y_j| \;\middle|\; i = 1, \dots, n \,\right\} \\ &\leq m \cdot \max\{\, |a_{ij}| \mid i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m \,\} \cdot \max\{\, |x_j - y_j| \mid j = 1, \dots, m \,\} \\ &\leq mc \cdot \|x - y\|_{\max} . \end{aligned}$$

Also ist f Lipschitz mit Lipschitz-Konstante mc. Hieraus folgt die Stetigkeit von f.

Hausaufgaben

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{K}$ gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^n$ äquivalent zur euklidischen Norm $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$ ist.
Lösung. Nach Aufgabe 1 ist die Funktion $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|$ stetig, wenn wir $\mathbb{K}^n$ mit der durch $\|\cdot\|_{\max}$ induzierten Metrik ausstatten. Da die Einheitssphäre $S := \{\, x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_{\mathrm{E}} = 1 \,\}$ abgeschlossen und beschränkt und somit kompakt ist, ist auch ihr Bild $f(S) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Somit existieren $a := \min f(S)$ und $b := \max f(S)$. Es gilt $0 \leq a \leq b$. Wir betrachten ein $x \in S$ mit $f(x) = a$. Wäre $a = 0$, so folgt aus $\|x\| = 0$, daß $x = 0 \notin S$. Ein Widerspruch.

Somit ist $a > 0$. Für $x \in \mathbb{K}^n$ mit $0 \neq x$ und $z := (\|x\|_{\mathrm{E}})^{-1}x \in S$ folgt

$$a \leq \|z\| = (\|x\|_{\mathrm{E}})^{-1}\|x\| \leq b .$$

Also gilt $a\|x\|_{\mathrm{E}} \leq \|x\| \leq b\|x\|_{\mathrm{E}}$. Diese Ungleichungen gelten auch für $x = 0$.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Bogenlänge folgender Kurven $f : I \to \mathbb{R}^2$.

(a) $f(t) := (t^3, \frac{3}{2}t^2)$ für $I = [a, b]$ mit $0 < a < b$.

(b) $f(t) := ((1 + \cos t)\cos t, (1 + \cos t)\sin t)$ für $I = [0, 2\pi]$.

Lösung. (a) Für die Ableitung $f'(t) = (3t^2, 3t)$ gilt $\|f'(t)\|_{\mathrm{E}}^2 = 9t^4 + 9t^2$. Somit folgt

$$
\begin{aligned}
L &= \int_a^b 3\sqrt{t^4 + t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{a^2}^{b^2} 3\sqrt{u^2 + u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{a^2}^{b^2} \frac{3}{2}\sqrt{u + 1}\,\mathrm{d}u \\
&= (u + 1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{a^2}^{b^2} \\
&= (b^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - (a^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\,.
\end{aligned}
$$

(b) Wir setzen $r(t) = 1 + \cos t$. Dann gilt

$$
f'(t) = (r'(t)\cos t - r(t)\sin t,\ r'(t)\sin t + r(t)\cos t)
$$

und $\|f'(t)\|_{\mathrm{E}}^2 = \|(r'(t)\cos t - r(t)\sin t, r'(t)\sin t + r(t)\cos t)\|_{\mathrm{E}}^2 = r'(t)^2 + r(t)^2$.

Wegen

$$
r'(t)^2 + r(t)^2 = 1 + 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2(1 + \cos t)
$$

folgt

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos t}\,\mathrm{d}t + \sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1 + \cos t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos t}\,\mathrm{d}t + \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos s}\,\mathrm{d}s \qquad (\text{mit } s = 2\pi - t) \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 + u}}{\sqrt{1 - u^2}}\,\mathrm{d}u \qquad (\text{mit } u = \cos t) \\
&= 2\sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - u}}\,\mathrm{d}u \\
&= -4\sqrt{2}\sqrt{1 - u}\Big|_{-1}^{1} = 8\,.
\end{aligned}
$$