**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010

# Analysis II
## Übung 5

**Aufgabe 1**

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen und $B \subseteq X$ offen. Zeigen Sie, daß $A \setminus B$ abgeschlossen ist.
*Lösung.* Es gilt $X \setminus (A \setminus B) = (X \setminus A) \cup B$. Da sowohl $X \setminus A$ als auch $B$ offen sind, gilt nach §1 Satz 3, daß auch $(X \setminus A) \cup B$ offen ist. Also ist das Komplement $A \setminus B$ abgeschlossen.

**Aufgabe 2**

Sei $X$ ein metrischer Raum und $K_1, \dots, K_n \subseteq X$ kompakte Teilräume von $X$. Zeigen Sie, daß $K_1 \cup \dots \cup K_n$ kompakt ist.
*Lösung.* Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $K_1 \cup \dots \cup K_n$. Dann ist $(U_i)_{i\in I}$ auch eine Überdeckung der $K_k$. Da jedes $K_k$ kompakt ist, gibt es zu jedem $k$ eine endliche Teilmenge $I_k \subseteq I$, so daß $(U_i)_{i\in I_k}$ eine Überdeckung von $K_k$ ist. Wir setzen $J := I_1 \cup \dots \cup I_n$. Dann ist $(U_i)_{i\in J}$ eine endliche Überdeckung von $K_1 \cup \dots \cup K_n$.

**Aufgabe 3**

Sei $X$ ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$. Zeigen Sie, daß

(a) $Y \setminus \partial Y$ offen,

(b) $Y \cup \partial Y$ abgeschlossen und

(c) $\partial Y$ abgeschlossen ist.

(Dies ist §1 Satz 4.)
*Lösung.* Siehe den Beweis von §1 Satz 4.

## Hausaufgaben

**Aufgabe 4**

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die im Punkte $x_0 \in X$ stetig ist.

(i) Zeigen Sie, daß es eine Umgebung $U$ von $x_0$ gibt, so daß $f(U) \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist.

(ii) Angenommen, $f(x_0) > 0$. Zeigen Sie, daß es eine Umgebung $U$ von $x_0$ gibt, so daß $f(x) > 0$ für alle $x \in U$ gilt.

**Aufgabe 5**

Sei $X$ ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$ nicht-leere abgeschlossene Mengen mit $A \cap B = \varnothing$. Zeigen Sie, daß es offene Mengen $C, D \subseteq X$ gibt mit $A \subseteq C$, $B \subseteq D$ und $C \cap D = \varnothing$.

*Hinweis.* Machen Sie sich eine Skizze. Beachten Sie, daß $A$ und $B$ nicht beschränkt sein müssen. Ein Beispiel in $X = \mathbb{R}^2$ wäre etwa

$$A := \{ (x, y) : y = 0 \} \quad \text{und} \quad B := \{ (x, y) : xy = 1, x > 0 \}.$$