Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010

Analysis II

Übung 5

Aufgabe 1

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen und $B \subseteq X$ offen. Zeigen Sie, daß $A \setminus B$ abgeschlossen ist.

Lösung. Es gilt $X \setminus (A \setminus B) = (X \setminus A) \cup B$. Da sowohl $X \setminus A$ als auch B offen sind, gilt nach §1 Satz 3, daß auch $(X \setminus A) \cup B$ offen ist. Also ist das Komplement $A \setminus B$ abgeschlossen.

Aufgabe 2

Sei X ein metrischer Raum und $K_1, \dots, K_n \subseteq X$ kompakte Teilräume von X. Zeigen Sie, daß $K_1 \cup \dots \cup K_n$ kompakt ist.

Lösung. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $K_1 \cup \dots \cup K_n$. Dann ist $(U_i)_{i \in I}$ auch eine Überdeckung der K_k. Da jedes K_k kompakt ist, gibt es zu jedem k eine endliche Teilmenge $I_k \subseteq I$, so daß $(U_i)_{i \in I_k}$ eine Überdeckung von K_k ist. Wir setzen $J := I_1 \cup \dots \cup I_n$. Dann ist $(U_i)_{i \in J}$ eine endliche Überdeckung von $K_1 \cup \dots \cup K_n$.

Aufgabe 3

Sei X ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$. Zeigen Sie, daß

(a) $Y \setminus \partial Y$ offen,

(b) $Y \cup \partial Y$ abgeschlossen und

(c) ∂Y abgeschlossen ist.

(Dies ist §1 Satz 4.)

Lösung. Siehe den Beweis von §1 Satz 4.

Hausaufgaben

Aufgabe 4

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die im Punkte $x_0 \in X$ stetig ist.

(i) Zeigen Sie, daß es eine Umgebung U von x_0 gibt, so daß $f(U) \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist.

(ii) Angenommen, $f(x_0) > 0$. Zeigen Sie, daß es eine Umgebung U von x_0 gibt, so daß $f(x) > 0$ für alle $x \in U$ gilt.

Lösung. (i) Sei $\varepsilon = 1$. Da f stetig in x_0 ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(x_0)| < 1 \quad \text{für alle } x \text{ mit } d(x, x_0) < \delta.$$

Wir setzen $U := B_\delta(x_0)$. Für $x \in U$ gilt dann

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| < 1 + |f(x_0)|.$$

Also ist f auf U beschränkt.

(ii) Sei $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0) > 0$. Da f stetig in x_0 ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \text{ mit } d(x, x_0) < \delta.$$

Wir setzen $U := B_\delta(x_0)$. Für $x \in U$ gilt dann

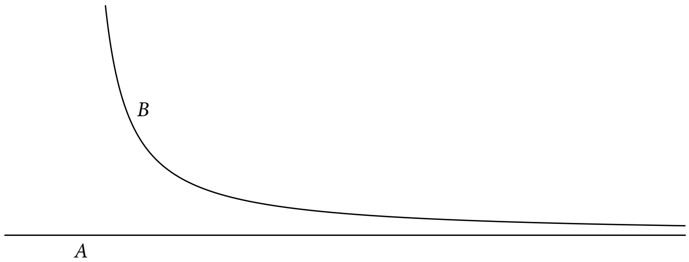
$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0) > 0.$$

Aufgabe 5

Sei X ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$ nicht-leere abgeschlossene Mengen mit $A \cap B = \varnothing$. Zeigen Sie, daß es offene Mengen $C, D \subseteq X$ gibt mit $A \subseteq C$, $B \subseteq D$ und $C \cap D = \varnothing$.

Hinweis. Machen Sie sich eine Skizze. Beachten Sie, daß A und B nicht beschränkt sein müssen. Ein Beispiel in $X = \mathbb{R}^2$ wäre etwa

$$A := \{ (x, y) : y = 0 \} \quad \text{und} \quad B := \{ (x, y) : xy = 1, x > 0 \}.$$



Lösung. Da $X \setminus A$ und $X \setminus B$ offen sind, gibt es zu jedem $x \in A \subseteq X \setminus B$ ein $\varepsilon(x) > 0$ mit $B_{\varepsilon(x)}(x) \subseteq X \setminus B$ und zu jedem $x \in B \subseteq X \setminus A$ ein $\varepsilon'(x) > 0$ mit $B_{\varepsilon'(x)}(x) \subseteq X \setminus A$. Wir definieren

$$C := \bigcup_{x \in A} B_{\varepsilon(x)/2}(x) \quad \text{und} \quad D := \bigcup_{x \in B} B_{\varepsilon'(x)/2}(x).$$

Dann sind C und D offen mit $A \subseteq C$ und $B \subseteq D$. Um zu zeigen, daß die Mengen disjunkt sind, nehmen wir an, es gäbe ein $z \in C \cap D$. Dann gibt es $x \in A$ und $y \in B$ mit

$$z \in B_{\varepsilon(x)/2}(x) \cap B_{\varepsilon'(y)/2}(y).$$

O. B. d. A. sei $\varepsilon'(y) \leq \varepsilon(x)$. Dann ist

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{\varepsilon(x)}{2} + \frac{\varepsilon'(y)}{2} \leq \varepsilon(x).$$

Also ist $y \in B_{\varepsilon(x)}(x) \subseteq X \setminus B$ im Widerspruch zu $y \in B$.