Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10.05.2010

4. Übung Analysis II
Sommersemester 2010

(G4.1) (Innenprodukträume, die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und die Parallelogrammgleichung)

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Funktion $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ heißt *Inneres Produkt* falls gilt:

(i) $(\forall x,y,z\in V)\Big(\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle\Big)$,

(ii) $(\forall \alpha\in\mathbb{R})(\forall x,y\in V)\Big(\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle\Big)$,

(iii) $(\forall x,y\in V)\Big(\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle\Big)$,

(iv) $(\forall x\in V)\Big(\langle x,x\rangle \geq 0\Big)$, wobei $\langle x,x\rangle = 0$ genau für $x=0$ gilt.

(Ein bekanntes Beispiel ist das Standardskalarprodukt $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ in $\mathbb{R}^n$. Siehe auch Kapitel 8 im Lineare Algebra II-Skript.)

Ein *Innenproduktraum* über $\mathbb{R}$ ist ein Paar $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, bestehend aus einem Vektorraum V und einem inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V. (Ein Innenproduktraum heißt auch *prähilbertscher Raum.*)

(a) Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Innenproduktraum über $\mathbb{R}$. Beweisen Sie die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*: Für alle $x,y\in V$ gilt

$$|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}. \tag{1}$$

Hinweis: Man beachte, dass für $\alpha\in\mathbb{R}$ gilt

$$0 \leq \langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\alpha\langle x,y\rangle + \alpha^2\langle y,y\rangle.$$

Für $y\neq 0$ setze man $\alpha = -\langle x,y\rangle/\langle y,y\rangle$.

(b) Zeigen Sie, dass man in jedem Innenproduktraum $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ über $\mathbb{R}$ eine Norm über $\mathbb{R}$ (die *kanonische* Norm) durch $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ definieren kann. Wir sagen, das inneres Produkt *induziert* die Norm $\|\cdot\|$.

Bemerkung: Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung kann man dann in der Form $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ schreiben.

(c) Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Innenproduktraum über $\mathbb{R}$ und $\|\cdot\|$ die kanonische Norm. Beweisen Sie die *Parallelogrammgleichung*: Für alle $x,y\in V$ gilt

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{2}$$

Bemerkung: Für den euklidischen $\mathbb{R}^2$ drückt (2) den elementargeometrischen Satz aus, dass in einem Parallelogramm die Summe der Quadrate über den Seiten gleich der Summe der Quadrate über den Diagonalen ist.

($*$) Sei $(V,\|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{R}$, in dem die Parallelogrammgleichung (2) gilt. Zeigen Sie, dass man durch

$$\langle x,y\rangle := \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 \tag{3}$$

ein inneres Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definieren kann. Zeigen Sie auch, dass $\|\cdot\|$ die kanonische Norm bezüglich des inneres Produkts $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist.

Um die Gleichung $\langle\alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ für alle $\alpha\in\mathbb{R}$ und alle $x,y\in V$ zu zeigen, zeigen wir zuerst, dass $\langle rx,y\rangle = r\langle x,y\rangle$ für alle $r\in\mathbb{Q}$. Dann folgt $\langle\alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ für alle $\alpha\in\mathbb{R}$ aus der Stetigkeit der Funktion $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Da wir aber Stetigkeit in diesem Kontext noch nicht eingeführt haben, können Sie diesen Schritt als gegeben voraussetzen, d. h. es reicht zu zeigen, dass $\langle rx,y\rangle = r\langle x,y\rangle$ für alle $r\in\mathbb{Q}$.

Aus (c) und ($*$) folgt also: *Genau diejenigen normierten Räume (über $\mathbb{R}$), in denen die Parallelogrammgleichung gilt, sind Innenprodukträume (über $\mathbb{R}$).*

Lösung.

(a) Die Ungleichung (1) ist für $y=0$ trivial, da $\langle x,0\rangle = \langle x, 0\cdot 0\rangle = 0\langle x,0\rangle = 0$ ist. Wir nehmen deshalb an, dass $y\neq 0$. Sei $\alpha = -\langle x,y\rangle/\langle y,y\rangle$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + 2\alpha\langle x,y\rangle + \alpha^2\langle y,y\rangle \\ &= \frac{1}{\langle y,y\rangle}\left(\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - 2\langle x,y\rangle^2 + \langle x,y\rangle^2\right) \\ &= \frac{1}{\langle y,y\rangle}\left(\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2\right) \end{aligned}$$

und somit

$$\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle,$$

also

$$|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}.$$

(b) Wir verifizieren (i)–(iii) aus der Definition einer Norm auf Seite 3 f. in Analysis II von Forster:

(i) Es gilt $\|x\| = 0 \iff \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \iff \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$.

(ii) Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in V$. Es gilt

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\,\|x\|.$$

(iii) Seien $x, y \in V$. Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

und somit

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

(c) Nach den Axiomen für ein inneres Produkt gilt

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle, \\ \|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle,\end{aligned}$$

wodurch sich (2) durch Addition ergibt.

($*$) Wir setzen

$$\langle x, y\rangle := \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2.$$

Zunächst beweisen wir: Falls $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein inneres Produkt ist, ist $\|\cdot\|$ die kanonische Norm bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$: Es gilt

$$\langle x, x\rangle = \left\|\frac{x+x}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-x}{2}\right\|^2 = \|x\|^2$$

und daher $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Wir werden jetzt zeigen, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein inneres Produkt ist. Es gilt

$$\langle x, y\rangle = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \left\|\frac{y+x}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{y-x}{2}\right\|^2 = \langle y, x\rangle.$$

Weiter gilt $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ und somit $\langle x, x\rangle \geq 0$, wobei $\langle x, x\rangle = 0$ genau für $x = 0$ gilt.

Sei $x_1, x_2, z \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle x_1 + x_2, z\rangle + \langle x_1 - x_2, z\rangle &= \frac{1}{4}\big(\|x_1 + x_2 + z\|^2 - \|x_1 + x_2 - z\|^2 \\ &\quad + \|x_1 - x_2 + z\|^2 - \|x_1 - x_2 - z\|^2\big) \\ &= \frac{1}{4}\big(\|(x_1+z) + x_2\|^2 + \|(x_1+z) - x_2\|^2\big) \\ &\quad - \frac{1}{4}\big(\|(x_1-z) + x_2\|^2 + \|(x_1-z) - x_2\|^2\big) \\ &= \frac{1}{4}\big(2\|x_1+z\|^2 + 2\|x_2\|^2\big) - \frac{1}{4}\big(2\|x_1-z\|^2 + 2\|x_2\|^2\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(\|x_1+z\|^2 - \|x_1-z\|^2\big) \\ &= 2\langle x_1, z\rangle.\end{aligned}$$

Mit $x_1 = x_2 = x$ erhalten wir $\langle 2x, z\rangle = 2\langle x, z\rangle$ und mit $x_1 = \frac{1}{2}(x+y)$, $x_2 = \frac{1}{2}(x-y)$ erhalten wir

$$\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = 2\langle (x+y)/2, z\rangle = \langle x+y, z\rangle. \tag{4}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $x, y \in V$.

Für $m \in \mathbb{N}$ folgt aus (4) die Gleichung

$$\langle mx, y\rangle = m\langle x, y\rangle$$

für alle $x, y \in V$. Da $\langle 0, y\rangle = 0$ folgt

$$0 = \langle 0, y\rangle = \langle x - x, y\rangle = \langle x + (-x), y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle -x, y\rangle$$

und somit $\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$. Also ist $\langle mx, y\rangle = m\langle x, y\rangle$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ und $x, y \in V$. Daher gilt

$$\langle (m/n)x, y\rangle = \frac{1}{n}\, n\,\langle (m/n)x, y\rangle = \frac{1}{n}\,\langle n(m/n)x, y\rangle = \frac{1}{n}\,\langle mx, y\rangle = \frac{m}{n}\,\langle x, y\rangle$$

für $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}^*$, also ist

$$\langle rx, y\rangle = r\langle x, y\rangle \tag{5}$$

für alle $r \in \mathbb{Q}$. Später werden wir auch zeigen können, dass die Funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle$ stetig ist. Die Gleichung $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x, y \in V$ folgt dann aus (5) und der Stetigkeit des inneres Produkts.

■

Hausaufgaben

(H4.2)

Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $C([a,b], \mathbb{R})$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Wir definieren die Funktion $\|\cdot\|_1 : C([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_1$ ein Norm auf $C([a,b],\mathbb{R})$ ist.

(b) Sei $(f_n)_n$ eine Folge von Punkten aus $C([a,b],\mathbb{R})$, d. h. eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$. Die Folge $(f_n)_n$ heißt *Cauchy-Folge* in dem normierten Vektorraum $(C([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, wenn gilt:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq N)(\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon).$$

Die Folge $(f_n)_n$ heißt *konvergent* in $(C([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ mit Grenzwert $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, wenn gilt

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\|f_n - f\|_1 < \varepsilon).$$

Finden Sie eine Cauchy-Folge $(f_n)_n$ in $(C([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, die in $(C([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ nicht konvergiert.

(c) Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Konvergiert die Folge $(f_n)_n$ in $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$?

(H4.3)

(a) Zeigen Sie, dass $(C([0,\pi],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ kein Innenproduktraum ist, d. h. dass $\|\cdot\|_1$ von keinem inneren Produkt induziert wird.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Parallelogrammgleichung in $(C([0,\pi],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ nicht gilt. Benutzen Sie dafür z. B. die Funktionen $f, g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos t}{2}, \quad g(t) = \frac{1}{2} - \frac{\cos t}{2}.$$

(b) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Innenproduktraum über $\mathbb{R}$. In (G4.1) haben wir gezeigt, dass für alle $x, y \in V$ gilt

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|, \tag{6}$$

wobei $\|\cdot\|$ die von dem inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm ist. Zeigen Sie, dass

$$|\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$$

genau dann gilt, wenn $y = 0$ oder $x = \lambda y$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Man setze $\lambda = \langle x, x\rangle / \langle y, x\rangle$, wenn $\langle y, x\rangle \neq 0$ ist.