Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10.05.2010

4. Übung Analysis II
Sommersemester 2010

(G4.1) (Innenprodukträume, die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und die Parallelogrammgleichung)

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Funktion $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt *Inneres Produkt* falls gilt:

(i) $(\forall x, y, z \in V)\Big(\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle\Big)$,

(ii) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall x, y \in V)\Big(\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle\Big)$,

(iii) $(\forall x, y \in V)\Big(\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle\Big)$,

(iv) $(\forall x \in V)\Big(\langle x, x\rangle \geq 0\Big)$, wobei $\langle x, x\rangle = 0$ genau für $x = 0$ gilt.

(Ein bekanntes Beispiel ist das Standardskalarprodukt $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ in $\mathbb{R}^n$. Siehe auch Kapitel 8 im Lineare Algebra II-Skript.)

Ein *Innenproduktraum* über $\mathbb{R}$ ist ein Paar $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, bestehend aus einem Vektorraum V und einem inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V. (Ein Innenproduktraum heißt auch *prähilbertscher Raum.*)

(a) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Innenproduktraum über $\mathbb{R}$. Beweisen Sie die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*: Für alle $x, y \in V$ gilt

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}. \tag{1}$$

Hinweis: Man beachte, dass für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 \leq \langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\alpha\langle x, y\rangle + \alpha^2\langle y, y\rangle.$$

Für $y \neq 0$ setze man $\alpha = -\langle x, y\rangle/\langle y, y\rangle$.

(b) Zeigen Sie, dass man in jedem Innenproduktraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ über $\mathbb{R}$ eine Norm über $\mathbb{R}$ (die *kanonische* Norm) durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ definieren kann. Wir sagen, das inneres Produkt *induziert* die Norm $\|\cdot\|$.

Bemerkung: Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung kann man dann in der Form $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ schreiben.

(c) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Innenproduktraum über $\mathbb{R}$ und $\|\cdot\|$ die kanonische Norm. Beweisen Sie die *Parallelogrammgleichung*: Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{2}$$

Bemerkung: Für den euklidischen $\mathbb{R}^2$ drückt (2) den elementargeometrischen Satz aus, dass in einem Parallelogramm die Summe der Quadrate über den Seiten gleich der Summe der Quadrate über den Diagonalen ist.

($*$) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{R}$, in dem die Parallelogrammgleichung (2) gilt. Zeigen Sie, dass man durch

$$\langle x, y\rangle := \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 \tag{3}$$

ein inneres Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definieren kann. Zeigen Sie auch, dass $\|\cdot\|$ die kanonische Norm bezüglich des inneres Produkts $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist.

Um die Gleichung $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $x, y \in V$ zu zeigen, zeigen wir zuerst, dass $\langle rx, y\rangle = r\langle x, y\rangle$ für alle $r \in \mathbb{Q}$. Dann folgt $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ aus der Stetigkeit der Funktion $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Da wir aber Stetigkeit in diesem Kontext noch nicht eingeführt haben, können Sie diesen Schritt als gegeben voraussetzen, d. h. es reicht zu zeigen, dass $\langle rx, y\rangle = r\langle x, y\rangle$ für alle $r \in \mathbb{Q}$.

Aus (c) und ($*$) folgt also: *Genau diejenigen normierten Räume (über $\mathbb{R}$), in denen die Parallelogrammgleichung gilt, sind Innenprodukträume (über $\mathbb{R}$).*

Lösung.

(a) Die Ungleichung (1) ist für $y = 0$ trivial, da $\langle x, 0\rangle = \langle x, 0\cdot 0\rangle = 0\langle x, 0\rangle = 0$ ist. Wir nehmen deshalb an, dass $y \neq 0$. Sei $\alpha = -\langle x, y\rangle/\langle y, y\rangle$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2\alpha\langle x, y\rangle + \alpha^2\langle y, y\rangle \\ &= \frac{1}{\langle y, y\rangle}\left(\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - 2\langle x, y\rangle^2 + \langle x, y\rangle^2\right) \\ &= \frac{1}{\langle y, y\rangle}\left(\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2\right) \end{aligned}$$

und somit

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle,$$

also

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

(b) Wir verifizieren (i)–(iii) aus der Definition einer Norm auf Seite 3 f. in Analysis II von Forster:

(i) Es gilt $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \Longleftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

(ii) Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in V$. Es gilt

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x\rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\,\|x\|.$$

(iii) Seien $x, y \in V$. Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

und somit

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

(c) Nach den Axiomen für ein inneres Produkt gilt

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle &= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle, \\ \|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle &= \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle, \end{aligned}$$

wodurch sich (2) durch Addition ergibt.

(∗) Wir setzen

$$\langle x, y\rangle := \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2.$$

Zunächst beweisen wir: Falls $\langle \cdot, \cdot\rangle$ ein inneres Produkt ist, ist $\|\cdot\|$ die kanonische Norm bezüglich $\langle \cdot, \cdot\rangle$: Es gilt

$$\langle x, x\rangle = \left\|\frac{x+x}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-x}{2}\right\|^2 = \|x\|^2$$

und daher $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Wir werden jetzt zeigen, dass $\langle \cdot, \cdot\rangle$ ein inneres Produkt ist. Es gilt

$$\langle x, y\rangle = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \left\|\frac{y+x}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{y-x}{2}\right\|^2 = \langle y, x\rangle.$$

Weiter gilt $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ und somit $\langle x, x\rangle \geq 0$, wobei $\langle x, x\rangle = 0$ genau für $x = 0$ gilt.

Sei $x_1, x_2, z \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle x_1 + x_2, z\rangle + \langle x_1 - x_2, z\rangle &= \frac{1}{4}\big(\|x_1 + x_2 + z\|^2 - \|x_1 + x_2 - z\|^2 \\ &\qquad + \|x_1 - x_2 + z\|^2 - \|x_1 - x_2 - z\|^2\big) \\ &= \frac{1}{4}\left(\|(x_1 + z) + x_2\|^2 + \|(x_1 + z) - x_2\|^2\right) \\ &\quad - \frac{1}{4}\left(\|(x_1 - z) + x_2\|^2 + \|(x_1 - z) - x_2\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2\|x_1 + z\|^2 + 2\|x_2\|^2\right) - \frac{1}{4}\left(2\|x_1 - z\|^2 + 2\|x_2\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|x_1 + z\|^2 - \|x_1 - z\|^2\right) \\ &= 2\langle x_1, z\rangle. \end{aligned}$$

Mit $x_1 = x_2 = x$ erhalten wir $\langle 2x, z\rangle = 2\langle x, z\rangle$ und mit $x_1 = \frac{1}{2}(x+y)$, $x_2 = \frac{1}{2}(x-y)$ erhalten wir

$$\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = 2\langle (x+y)/2, z\rangle = \langle x+y, z\rangle. \tag{4}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $x, y \in V$.

Für $m \in \mathbb{N}$ folgt aus (4) die Gleichung

$$\langle mx, y\rangle = m\langle x, y\rangle$$

für alle $x, y \in V$. Da $\langle 0, y\rangle = 0$ folgt

$$0 = \langle 0, y\rangle = \langle x - x, y\rangle = \langle x + (-x), y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle -x, y\rangle$$

und somit $\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$. Also ist $\langle mx, y\rangle = m\langle x, y\rangle$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ und $x, y \in V$. Daher gilt

$$\langle (m/n)x, y\rangle = \frac{1}{n}\, n\,\langle (m/n)x, y\rangle = \frac{1}{n}\,\langle n(m/n)x, y\rangle = \frac{1}{n}\,\langle mx, y\rangle = \frac{m}{n}\,\langle x, y\rangle$$

für $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}^*$, also ist

$$\langle rx, y\rangle = r\langle x, y\rangle \tag{5}$$

für alle $r \in \mathbb{Q}$. Später werden wir auch zeigen können, dass die Funktion $\langle \cdot, \cdot\rangle$ stetig ist. Die Gleichung $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x, y \in V$ folgt dann aus (5) und der Stetigkeit des inneres Produkts.

■

Hausaufgaben

(H4.2)

Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $C([a, b], \mathbb{R})$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Wir definieren die Funktion $\|\cdot\|_1 : C([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\| \cdot \|_1$ ein Norm auf $C([a,b],\mathbb{R})$ ist.

(b) Sei $(f_n)_n$ eine Folge von Punkten aus $C([a,b],\mathbb{R})$, d. h. eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$. Die Folge $(f_n)_n$ heißt *Cauchy-Folge* in dem normierten Vektorraum $(C([a,b],\mathbb{R}), \| \cdot \|_1)$, wenn gilt:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq N)(\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon).$$

Die Folge $(f_n)_n$ heißt *konvergent* in $(C([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ mit Grenzwert $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, wenn gilt

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\|f_n - f\|_1 < \varepsilon).$$

Finden Sie eine Cauchy-Folge $(f_n)_n$ in $(C([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, die in $(C([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ nicht konvergiert.

(c) Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Konvergiert die Folge $(f_n)_n$ in $(C([0,1],\mathbb{R}), \| \cdot \|_1)$?

Lösung.

(a) Wir verifizieren (i)–(iii) aus der Definition einer Norm auf Seite 3 f. in Analysis II von Forster:

(i) Sei $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b 0\,dx = 0.$$

Sei umgekehrt $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ mit $\|f\|_1 = 0$, d. h.

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = 0.$$

Nach Aufgabe 5(b) in der Probeklausur zu Analysis I gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$, d. h. $f = 0$.

(ii) Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in C([a,b],\mathbb{R})$. Es gilt

$$\|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f(x)|\,dx = \int_a^b |\lambda| \cdot |f(x)|\,dx = |\lambda| \int_a^b |f(x)|\,dx = |\lambda| \cdot \|f\|_1.$$

(iii) Seien $f, g \in C([a,b],\mathbb{R})$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_1 &= \int_a^b |(f+g)(x)|\,dx \\
&= \int_a^b |f(x)+g(x)|\,dx \\
&\leq \int_a^b |f(x)| + |g(x)|\,dx \\
&= \int_a^b |f(x)|\,dx + \int_a^b |g(x)|\,dx = \|f\|_1 + \|g\|_1.
\end{aligned}$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}^*$ definieren wir $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x \in [-1, -1/n], \\ nx & \text{if } x \in [-1/n, 1/n], \\ 1 & \text{if } x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

(Skizzieren Sie den Graphen von f_n für $n = 2,3,4$!) Für $n > m$ und $x \notin [-1/m, 1/m]$ gilt $f_n(x) = f_m(x)$ und daher

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_m\|_1 &= \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx \\
&= \int_{-1/m}^{1/m} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx \\
&\leq \int_{-1/m}^{1/m} 2\,dx = \frac{4}{m} \xrightarrow{m\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Also ist $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in der Norm $\| \cdot \|_1$. Beachte, dass $(f_n)_n$ punktweise gegen die unstetige Treppenfunktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x \in [-1, 0[\,, \\ 0 & \text{if } x = 0, \\ 1 & \text{if } x \in]0,1], \end{cases}$$

konvergiert.

Sei $g \in C([-1,1],\mathbb{R})$. Wir werden zeigen, dass $(f_n)_n$ in der Norm $\| \cdot \|_1$ nicht gegen g konvergieren kann. Sei o.B.d.A. $g(0) \geq 0$. Da g stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $|g(x) - g(0)| < 1/2$ für $|x| \leq \delta$ und somit $g(x) > -1/2$ für $x \in [-\delta, 0]$. Sei $N > 1/\delta$, d. h. $\delta > 1/N$. Für alle $n \geq 2N$ gilt dann $f_n(x) = -1$ für $x \in [-1/N, -1/(2N)]$ und somit

$$\begin{aligned}
\|g - f_n\|_1 &= \int_{-1}^{1} |f_n(x) - g(x)|\,dx \\
&\geq \int_{-1/N}^{-1/(2N)} |f_n(x) - g(x)|\,dx \\
&\geq \int_{-1/N}^{-1/(2N)} 1/2\,dx = \frac{1}{2N}.
\end{aligned}$$

Also konvergiert $(f_n)_n$ nicht gegen g in $(C([-1,1],\mathbb{R}), \| \cdot \|_1)$. Falls $g(0) \leq 0$ argumentieren wir auf die gleiche Weise.

(c) Die Folge $(f_n)_n$ konvergiert punktweise gegen die unstetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \neq 1, \\ 1 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Allerdings konvergiert $(f_n)_n$ *in der Norm* $\|\cdot\|_1$ gegen die Funktion $g = 0$: Es gilt

$$\|f_n - g\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - 0|\, dx = \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

und somit gilt

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\|f_n - g\|_1 < \varepsilon).$$

■

(H4.3)

(a) Zeigen Sie, dass $(C([0,\pi],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ kein Innenproduktraum ist, d. h. dass $\|\cdot\|_1$ von keinem inneren Produkt induziert wird.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Parallelogrammgleichung in $(C([0,\pi],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ nicht gilt. Benutzen Sie dafür z. B. die Funktionen $f, g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos t}{2}, \quad g(t) = \frac{1}{2} - \frac{\cos t}{2}.$$

(b) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Innenproduktraum über $\mathbb{R}$. In (G4.1) haben wir gezeigt, dass für alle $x, y \in V$ gilt

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|, \tag{6}$$

wobei $\|\cdot\|$ die von dem inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm ist. Zeigen Sie, dass

$$|\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$$

genau dann gilt, wenn $y = 0$ oder $x = \lambda y$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Man setze $\lambda = \langle x, x\rangle / \langle y, x\rangle$, wenn $\langle y, x\rangle \neq 0$ ist.

Lösung.

(a) Es gilt $(f+g)(t) = 1$ und $(f-g)(t) = \cos t$ für alle $t \in [0,\pi]$. Also ist $\|f+g\|_1 = \pi$ und

$$\|f - g\|_1 = \int_0^\pi |\cos t|\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt - \int_{\pi/2}^\pi \cos t\, dt = 2.$$

Weiter gilt

$$\|f\|_1 = \int_0^\pi \left|\frac{1}{2} + \frac{\cos t}{2}\right| dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin t}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\|g\|_1 = \int_0^\pi \left|\frac{1}{2} - \frac{\cos t}{2}\right| dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin t}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Also ist

$$2\|f\|_1^2 + 2\|g\|_1^2 = \pi^2 \neq \pi^2 + 4 = \|f+g\|_1^2 + \|f-g\|_1^2.$$

Somit gilt die Parallelogrammgleichung nicht. Nach (G4.1) wird $\|\cdot\|_1$ nicht von einem inneren Produkt induziert.

(b) Es ist klar, dass mit $y = 0$ gilt $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ so dass $x = \lambda y$. Dann gilt

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle \lambda y, y\rangle| = |\lambda|\,|\langle y, y\rangle| = |\lambda|\,\|y\|^2 = \|\lambda y\|\,\|y\| = \|x\|\,\|y\|.$$

Umgekehrt müssen wir zeigen: Wenn $y \neq 0$ und $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$ ist, existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $x = \lambda y$. Der Fall $\langle x, y\rangle = 0$ ist trivial. Sei also $\langle x, y\rangle \neq 0$. Wir setzen

$$\lambda = \frac{\langle x, x\rangle}{\langle y, x\rangle},$$

und mit $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - 2\langle x, x\rangle + \frac{\langle x, x\rangle^2\langle y, y\rangle}{\langle y, x\rangle^2} \\
&= -\langle x, x\rangle + \frac{\langle x, x\rangle\|x\|^2\,\|y\|^2}{\langle y, x\rangle^2} \\
&= -\langle x, x\rangle + \frac{\langle x, x\rangle\|x\|^2\,\|y\|^2}{\|x\|^2\,\|y\|^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Also ist $x - \lambda y = 0$.

■