



Analysis II

Übung 3

Aufgabe 1

Sie $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen, welche gleichmäßig gegen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, daß dann auch die Grenzfunktion f Riemann-integrierbar ist und daß gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Lösung. Wir zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei Treppenfunktionen φ und ψ gibt mit

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \leq \varepsilon.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gibt es einen Index n mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Da f_n Riemann-integrierbar ist, gibt es Treppenfunktionen φ_0 und ψ_0 mit

$$\varphi_0 \leq f_n \leq \psi_0 \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi_0(x) dx - \int_a^b \varphi_0(x) dx \leq \varepsilon/3.$$

Wir setzen

$$\varphi(x) := \varphi_0(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad \text{und} \quad \psi(x) := \psi_0(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Dann gilt

$$\varphi(x) \leq f_n(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \leq f(x) \leq f_n(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \leq \psi(x)$$

und

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx &= \int_a^b \left[\psi_0(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right] dx - \int_a^b \left[\varphi_0(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right] dx \\ &= \frac{2\varepsilon}{3} + \int_a^b \psi_0(x) dx - \int_a^b \varphi_0(x) dx \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, daß

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gibt es einen Index N mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{für alle } n \geq N \text{ und } x \in [a, b].$$

Für $n \geq N$ folgt

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx = \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Aufgabe 2

Sei $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Berechnen Sie die Taylor-Reihe $T[f, a]$ für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und bestimmen Sie ihren Konvergenzradius.

Lösung. Um die Ableitungen von f zu bestimmen, zeigen wir per Induktion nach n , daß

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Für $n = 0$ ist

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Angenommen, wir haben die Formel schon für n gezeigt. Dann folgt

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \right] = n! \frac{-(n+1)}{(1-x)^{n+2}} \cdot (-1) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}.$$

Für $a \neq 1$ ergibt sich somit

$$T[f, a](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-a)^{n+1}} (x-a)^n.$$

Nach Aufgabe (G2.1) der 2. Übung gilt für den Konvergenzradius R die Formel

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(1-a)^{-(n+1)}|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|1-a|^{-1}} \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|1-a|^{-n}} = 1 \cdot \frac{1}{|1-a|}.$$

Daher ist $R = |1-a|$.

Hausaufgaben

Aufgabe 3

Sei $f_n : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-x/n}.$$

Zeigen Sie, daß $(f_n)_n$ gleichmäßig konvergiert und daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n dx \neq \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dx.$$

(Dieses Beispiel zeigt, daß §21 Satz 4 nicht für uneigentliche Integrale gilt.)

Aufgabe 4

In dieser Aufgabe zeigen wir, daß wir die Bedingungen von §21 Satz 5 abschwächen können. Anstatt die punktweise Konvergenz der Folge $(f_n)_n$ zu fordern, reicht die Konvergenz der Funktionswerte $(f_n(x_0))_n$ an einem einzigen Punkt x_0 .

Sei $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen. Angenommen, die Ableitungen $(f'_n)_n$ konvergieren gleichmäßig gegen eine Funktion $f^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und für mindestens einen Punkt $x_0 \in [a, b]$ konvergiert die Folge $(f_n(x_0))_n$. Zeigen Sie, daß die Folge $(f_n)_n$ im gesamten Intervall $[a, b]$ punktweise konvergiert.