Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010

Analysis II

Übung 3

Aufgabe 1

Sie $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen, welche gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, daß dann auch die Grenzfunktion f Riemann-integrierbarer ist und daß gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung. Wir zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei Treppenfunktionen φ und ψ gibt mit

$$\varphi \le f \le \psi \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \le \varepsilon\,.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gibt es einen Index n mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\,.$$

Da f_n Riemann-integrierbar ist, gibt es Treppenfunktionen φ_0 und ψ_0 mit

$$\varphi_0 \le f_n \le \psi_0 \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi_0(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_0(x)\,\mathrm{d}x \le \varepsilon/3\,.$$

Wir setzen

$$\varphi(x) := \varphi_0(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad \text{und} \quad \psi(x) := \psi_0(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\,.$$

Dann gilt

$$\varphi(x) \le f_n(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \le f(x) \le f_n(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \le \psi(x)$$

und

$$\begin{aligned}\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \left[\psi_0(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\right]\mathrm{d}x - \int_a^b \left[\varphi_0(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{2\varepsilon}{3} + \int_a^b \psi_0(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_0(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, daß

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gibt es einen Index N mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{für alle } n \ge N \text{ und } x \in [a,b]\,.$$

Für $n \ge N$ folgt

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,\mathrm{d}x = \varepsilon/2 < \varepsilon\,.$$

Aufgabe 2

Sei $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Berechnen Sie die Taylor-Reihe $T[f,a]$ für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und bestimmen Sie ihren Konvergenzradius.

Lösung. Um die Ableitungen von f zu bestimmen, zeigen wir per Induktion nach n, daß

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\,.$$

Für $n = 0$ ist

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{1-x}\,.$$

Angenommen, wir haben die Formel schon für n gezeigt. Dann folgt

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right] = n!\frac{-(n+1)}{(1-x)^{n+2}} \cdot (-1) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}\,.$$

Für $a \neq 1$ ergibt sich somit

$$T[f,a](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-a)^{n+1}}(x-a)^n\,.$$

Nach Aufgabe (G2.1) der 2. Übung gilt für den Konvergenzradius R die Formel

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(1-a)^{-(n+1)}|}\,. = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1-a|^{-1}} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1-a|^{-n}} = 1 \cdot \frac{1}{|1-a|}\,.$$

Daher ist $R = |1-a|$.

Hausaufgaben

Aufgabe 3

Sei $f_n : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-x/n}.$$

Zeigen Sie, daß $(f_n)_n$ gleichmäßig konvergiert und daß

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \,\mathrm{d}x \neq \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}x\,.$$

(Dieses Beispiel zeigt, daß §21 Satz 4 nicht für uneigentliche Integrale gilt.)

Lösung. Wegen $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ konvergiert $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen die konstante Funktion $f(x) = 0$. Andererseits folgt mit der Substitution $u := -x/n$, daß

$$\int_0^\infty \frac{1}{n} e^{-x/n} \,\mathrm{d}x = -\int_0^{-\infty} e^u \,\mathrm{d}u = \lim_{R\to-\infty} -e^u\Big|_0^R = \lim_{R\to-\infty} -e^R + e^0 = 0 + 1\,.$$

Also ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \,\mathrm{d}x = 1 \neq 0 = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 4

In dieser Aufgabe zeigen wir, daß wir die Bedingungen von §21 Satz 5 abschwächen können. Anstatt die punktweise Konvergenz der Folge $(f_n)_n$ zu fordern, reicht die Konvergenz der Funktionswerte $(f_n(x_0))_n$ an einem einzigen Punkt x_0.

Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen. Angenommen, die Ableitungen $(f_n')_n$ konvergieren gleichmäßig gegen eine Funktion $f^* : [a, b] \to \mathbb{R}$ und für mindestens einen Punkt $x_0 \in [a, b]$ konvergiert die Folge $(f_n(x_0))_n$. Zeigen Sie, daß die Folge $(f_n)_n$ im gesamten Intervall $[a, b]$ punktweise konvergiert.

Lösung. Sei $c := \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$. Wir zeigen, daß $(f_n)_n$ punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = c + \int_{x_0}^{x} f^*(t)\,\mathrm{d}t$$

konvergiert. Man beachte, daß f wohldefiniert ist, da das Integral $\int_{x_0}^{x} f^*(t)\,\mathrm{d}t$ nach §21 Satz 4 existiert.

Sei also $x \in [a, b]$ und $\varepsilon > 0$. Nach Definition von c gibt es einen Index N_0 mit

$$|f_n(x_0) - c| < \varepsilon/2 \quad \text{für } n \geq N_0 .$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $(f_n')_n$ gegen f^* gibt es einen Index N_1 mit

$$|f_n'(t) - f^*(t)| < \frac{\varepsilon}{2(x - x_0)} \quad \text{für } n \geq N_1 \text{ und alle } t \in [a, b] .$$

Da f_n' stetig ist, gilt nach dem Fundamentalsatz

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t .$$

Für $n \geq N_0 + N_1$ folgt somit

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t - c - \int_{x_0}^{x} f^*(t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq |f_n(x_0) - c| + \left| \int_{x_0}^{x} [f_n'(t) - f^*(t)]\,\mathrm{d}t \right| \\
&< \varepsilon/2 + \int_{x_0}^{x} \frac{\varepsilon}{2(x - x_0)}\,\mathrm{d}t = \varepsilon .
\end{aligned}$$