Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

26.04.2010

2. Übung Analysis II
Sommersemester 2010

(G2.1) (Die Hadamardsche Formel)

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten c_n. Sei R der Konvergenzradius dieser Reihe. Man zeige

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{-1}.$$

Dabei vereinbaren wir (in diesem Zusammenhang), dass $0^{-1} = \infty$ und $\infty^{-1} = 0$.

Lösung.

Der Beweis ist eine Anwendung des Wurzelkriteriums. Beachte, dass das Wurzelkriterium aus Analysis I (G7.1) auch für komplexe Reihen gilt, genau wie das Majorantenkriterium und das Quotientenkriterium (vgl. Forster Analysis I, Seite 131). Sei

$$\rho := \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{-1}.$$

Wir wollen zeigen, dass $\rho = R$. Da

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} \ = \ |z-a| \sqrt[n]{|c_n|}$$

gilt, folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} \ = \ |z-a| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \ < \ 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |z-a| < \rho$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} \ = \ |z-a| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \ > \ 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |z-a| > \rho.$$

Wir zeigen zuerst, dass $\rho \leq R$. Falls $|z-a| < \rho$ gilt, d. h. $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} < 1$, gibt es $\varepsilon > 0$, so dass

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} < 1 - \varepsilon.$$

Also existiert nach § 9 Satz 4 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} < 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $n \geq n_0$. Somit konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ nach dem Wurzelkriterium absolut. Es folgt, dass $\rho \leq R$.

Wir müssen noch zeigen, dass $\rho \geq R$. Falls $|z-a| > \rho$, d. h. $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} > 1$, gibt es $\varepsilon > 0$, so dass

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} > 1 + \varepsilon.$$

Damit folgt aus § 9 Satz 4, dass es unendlich viele Indizes $m \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\sqrt[m]{|c_m(z-a)^m|} > 1 + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2},$$

also

$$|c_m(z-a)^m| > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^m > 1.$$

Also gilt nicht $c_n(z-a)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, und somit konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ nicht. Es folgt, dass $\rho \geq R$.

Beachte, dass wir keine Aussage über den Fall $|z-a| = \rho$ gemacht haben.

■

(G2.2) (Die Euler-Mascheronische Konstante)

Sei

$$\gamma_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N.$$

(i) Man zeige $0 < \gamma_N < 1$ für alle $N > 1$.

(ii) Man beweise, dass der Limes
$$\gamma := \lim_{N\to\infty} \gamma_N$$
existiert.

Bemerkung: Die Zahl γ heißt *Euler-Mascheronische Konstante*; es gilt

$$\gamma = 0.57721566\ldots$$

Die Euler-Mascheronische Konstante tritt in der Mathematik häufig und manchmal auch ganz unerwartet in unterschiedlichen Teilgebieten auf. Trotz großer Anstrengungen ist bis heute unbekannt, ob diese Zahl rational oder irrational ist.

Lösung.

(i) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt

$$\frac{1}{n+1} \;<\; \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \;<\; \frac{1}{n}.$$

Durch Summation erhält man daraus für $N > 1$

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \;<\; \int_1^N \frac{1}{x}\, dx \;<\; \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}.$$

Da $\int_1^N \frac{1}{x}\, dx = \log N$, ergibt sich

$$\frac{1}{N} \;<\; \gamma_N \;=\; \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N \;<\; 1.$$

(ii) Um zu zeigen, dass die Folge (γ_N) konvergiert, beweisen wir, dass sie monoton fällt. Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Terme ist

$$\gamma_{N-1} - \gamma_N \;=\; \log\left(\frac{N}{N-1}\right) - \frac{1}{N}.$$

Unsere Behauptung ist daher bewiesen, wenn wir zeigen können, dass $1/N \leq \log(N/(N-1))$, oder, was damit äquivalent ist,

$$e^{1/N} \;\leq\; e^{\log(N/(N-1))} \;=\; \frac{N}{N-1} \;=\; \frac{1}{1-1/N} \qquad \text{für } N > 1.$$

Dies erkennt man z. B. durch Vergleich der Reihen-Entwicklungen

$$e^x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\frac{1}{1-x} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{für } |x| < 1.$$

■

Hausaufgaben

(H2.3)

(i) Geben Sie eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, so dass der Grenzwert

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx$$

existiert, das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

aber nicht.

(ii) Untersuche die folgenden Funktionenfolgen bzw. Funktionenreihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x^3}, \quad x \in [0,5],\ n \in \mathbb{N}^*$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3}, \quad x \in [0,1]$;

(c) $g_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$.

(H2.4)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie: Ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent mit Grenzfunktion f und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion, so ist auch die Funktionenfolge $(\phi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent und ihre Grenzfunktion ist $\phi \circ f$.