Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

26.04.2010

2. Übung Analysis II
Sommersemester 2010

(G2.1) (Die Hadamardsche Formel)

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten c_n. Sei R der Konvergenzradius dieser Reihe. Man zeige

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1}.$$

Dabei vereinbaren wir (in diesem Zusammenhang), dass $0^{-1} = \infty$ und $\infty^{-1} = 0$.

Lösung.

Der Beweis ist eine Anwendung des Wurzelkriteriums. Beachte, dass das Wurzelkriterium aus Analysis I (G7.1) auch für komplexe Reihen gilt, genau wie das Majorantenkriterium und das Quotientenkriterium (vgl. Forster Analysis I, Seite 131). Sei

$$\rho := \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1}.$$

Wir wollen zeigen, dass $\rho = R$. Da

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} \;=\; |z-a|\sqrt[n]{|c_n|}$$

gilt, folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} \;=\; |z-a| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \;<\; 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |z-a| < \rho$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} \;=\; |z-a| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \;>\; 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |z-a| > \rho.$$

Wir zeigen zuerst, dass $\rho \leq R$. Falls $|z-a| < \rho$ gilt, d. h. $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} < 1$, gibt es $\varepsilon > 0$, so dass

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} < 1 - \varepsilon.$$

Also existiert nach § 9 Satz 4 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} < 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $n \geq n_0$. Somit konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ nach dem Wurzelkriterium absolut. Es folgt, dass $\rho \leq R$.

Wir müssen noch zeigen, dass $\rho \geq R$. Falls $|z-a| > \rho$, d. h. $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} > 1$, gibt es $\varepsilon > 0$, so dass

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} > 1 + \varepsilon.$$

Damit folgt aus § 9 Satz 4, dass es unendlich viele Indizes $m \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\sqrt[m]{|c_m(z-a)^m|} > 1 + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2},$$

also

$$|c_m(z-a)^m| > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^m > 1.$$

Also gilt nicht $c_n(z-a)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, und somit konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ nicht. Es folgt, dass $\rho \geq R$.

Beachte, dass wir keine Aussage über den Fall $|z-a| = \rho$ gemacht haben.

■

(G2.2) (Die Euler-Mascheronische Konstante)

Sei

$$\gamma_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N.$$

(i) Man zeige $0 < \gamma_N < 1$ für alle $N > 1$.

(ii) Man beweise, dass der Limes

$$\gamma := \lim_{N\to\infty} \gamma_N$$

existiert.

Bemerkung: Die Zahl γ heißt *Euler-Mascheronische Konstante*; es gilt

$$\gamma = 0.57721566\ldots$$

Die Euler-Mascheronische Konstante tritt in der Mathematik häufig und manchmal auch ganz unerwartet in unterschiedlichen Teilgebieten auf. Trotz großer Anstrengungen ist bis heute unbekannt, ob diese Zahl rational oder irrational ist.

Lösung.

(i) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt

$$\frac{1}{n+1} \;<\; \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \;<\; \frac{1}{n}.$$

Durch Summation erhält man daraus für $N > 1$

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \;<\; \int_1^N \frac{1}{x}\,dx \;<\; \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}.$$

Da $\int_1^N \frac{1}{x}\,dx = \log N$, ergibt sich

$$\frac{1}{N} \;<\; \gamma_N \;=\; \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N \;<\; 1.$$

(ii) Um zu zeigen, dass die Folge (γ_N) konvergiert, beweisen wir, dass sie monoton fällt. Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Terme ist

$$\gamma_{N-1} - \gamma_N \;=\; \log\left(\frac{N}{N-1}\right) - \frac{1}{N}.$$

Unsere Behauptung ist daher bewiesen, wenn wir zeigen können, dass $1/N \leq \log(N/(N-1))$, oder, was damit äquivalent ist,

$$e^{1/N} \;\leq\; e^{\log(N/(N-1))} \;=\; \frac{N}{N-1} \;=\; \frac{1}{1-1/N} \qquad \text{für } N > 1.$$

Dies erkennt man z. B. durch Vergleich der Reihen-Entwicklungen

$$e^x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\frac{1}{1-x} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{für } |x| < 1.$$

■

Hausaufgaben

(H2.3)

(i) Geben Sie eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, so dass der Grenzwert

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

existiert, das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

aber nicht.

(ii) Untersuche die folgenden Funktionenfolgen bzw. Funktionenreihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n(x) = \sqrt[n]{n^2x^3}, \quad x \in [0,5],\; n \in \mathbb{N}^*$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}, \quad x \in [0,1]$;

(c) $g_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R},\; n \in \mathbb{N}^*$.

Lösung.

(i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Es gilt

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx \;=\; \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-R}^{R} \;=\; \frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{2} \;=\; 0$$

für alle $R > 0$ und daher $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 0$. Weiter gilt

$$\int_0^R f(x)\,dx \;=\; \frac{R^2}{2} \;\overset{R\to\infty}{\longrightarrow}\; +\infty,$$

und somit existiert $\int_0^\infty f(x)\,dx$ nicht. Daher existiert auch $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ nicht.

(ii) (a) Für $x \in]0,5]$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2x^3} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 \cdot (\sqrt[n]{x})^3 = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^2 \cdot (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x})^3 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Für $x = 0$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 \cdot x^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{0} = 0.$$

Also ist $(f_n)_{n\geq 1}$ punktweise konvergent auf $[0,5]$ mit der Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ 1 & \text{falls } x \in]0,5]. \end{cases}$$

Da f nicht stetig ist, aber f_n für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ stetig auf [0,5] ist, kann $(f_n)_{n\geq 1}$ auf [0,5] nicht gleichmäßig konvergieren.

(b) Wir setzen $h_n(x) := nx^2/(n^3+x^3)$ für jedes $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt

$$|h_n(x)| = \left|\frac{nx^2}{n^3+x^3}\right| = \frac{nx^2}{n^3+x^3} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

für alle $x \in [0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}^*$. Also ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|_{[0,1]} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

und damit konvergent nach dem Majorantenkriterium. Mit dem Weierstraßschen Konvergenzkriterium folgt nun die gleichmäßige Konvergenz der untersuchten Funktionenreihe. Damit konvergiert diese insbesondere auch punktweise.

(c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} x/n = 0$ und da die Sinus-Funktion stetig ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) = \sin(0) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also konvergiert $(g_n)_{n\geq 1}$ punktweise gegen die Nullfunktion. Die Konvergenz ist aber nicht gleichmäßig, denn für $x_n := \frac{n\pi}{2}$ gilt

$$g_n(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Also ist

$$\|g_n - 0\|_{\mathbb{R}} = \|g_n\|_{\mathbb{R}} \geq |g_n(x_n)| = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und somit kann $(g_n)_{n\geq 1}$ nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergieren.

■

(H2.4)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie: Ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent mit Grenzfunktion f und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion, so ist auch die Funktionenfolge $(\phi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent und ihre Grenzfunktion ist $\phi \circ f$.

Lösung.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es dank der gleichmäßigen Stetigkeit von ϕ ein $\delta > 0$, so dass

$$|\phi(y) - \phi(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } y, z \in \mathbb{R} \text{ mit } |y - z| < \delta$$

ist. Da weiter $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta \quad \text{für alle } n \geq N \text{ und alle } x \in D$$

gilt. Damit gilt für alle $x \in D$ und alle $n \geq N$

$$|(\phi \circ f_n)(x) - (\phi \circ f)(x)| = |\phi(f_n(x)) - \phi(f(x))| < \varepsilon,$$

womit wir gezeigt haben, dass $\phi \circ f_n$ gleichmäßig auf D gegen $\phi \circ f$ konvergiert.

■