

Analysis II

Übung 1

Aufgabe 1

Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $\int_0^1 x e^{1-x^2} dx$

(b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx$

Lösung. (a) Substitution mit $u := 1 - x^2$ ergibt

$$\int_0^1 x e^{1-x^2} dx = \int_1^0 -\frac{1}{2} e^u du = -\frac{1}{2} e^u \Big|_1^0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e.$$

(b) Substitution mit $u := 1 - \sin x$ ergibt

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx = \int_1^0 \frac{-1}{\sqrt{u}} du = -2\sqrt{u} \Big|_1^0 = 0 + 2\sqrt{1} = 2.$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx$

(b) $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx$

(c) $\int_0^1 x^3 e^x dx$

Lösung.

(a)
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \sin x dx &= -x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx \\ &= 0 - 0 + \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1 - 0, \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx &= x^2 \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x \sin x dx \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 0 - 2 \cdot 1, \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3 e^x dx &= x^3 e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 3x^2 e^x dx \\ &= e - 0 - 3x^2 e^x \Big|_0^1 + \int_0^1 6x e^x dx \\ &= e - 3e - 0 + 6x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 6e^x dx \\ &= -2e + 6e - 0 - 6e^x \Big|_0^1 = -2e + 6. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit Hilfe partieller Integration, daß

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) \, dx = \begin{cases} \pi & \text{für } n = m, \\ 0 & \text{für } n \neq m. \end{cases}$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x) \, dx$$

genau dann existiert, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Stelle $z_0 > a$ gibt, so dass

$$(*) \quad \left| \int_s^t f(x) \, dx \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } z_0 < s < t.$$