Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010

Analysis II
Übung 1

Aufgabe 1

Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $\int_0^1 x e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\,\mathrm{d}x$

Lösung. (a) Substitution mit $u := 1 - x^2$ ergibt

$$\int_0^1 x e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^0 -\frac{1}{2}e^u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}e^u\Big|_1^0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e\,.$$

(b) Substitution mit $u := 1 - \sin x$ ergibt

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^0 \frac{-1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = -2\sqrt{u}\Big|_1^0 = 0 + 2\sqrt{1} = 2\,.$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $\int_0^{\pi/2} x\sin x\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_0^{\pi/2} x^2\cos x\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_0^1 x^3 e^x\,\mathrm{d}x$

Lösung.

(a)
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x\sin x\,\mathrm{d}x &= -x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= 0 - 0 + \sin x\Big|_0^{\pi/2} = 1 - 0\,,\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x^2\cos x\,\mathrm{d}x &= x^2\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 0 - 2\cdot 1\,,\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3 e^x\,\mathrm{d}x &= x^3 e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 3x^2 e^x\,\mathrm{d}x \\ &= e - 0 - 3x^2 e^x\Big|_0^1 + \int_0^1 6x e^x\,\mathrm{d}x \\ &= e - 3e - 0 + 6x e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 6e^x\,\mathrm{d}x \\ &= -2e + 6e - 0 - 6e^x\Big|_0^1 = -2e + 6\,.\end{aligned}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 3

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit Hilfe partieller Integration, daß

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi & \text{für } n = m\,, \\ 0 & \text{für } n \neq m\,. \end{cases}$$

Lösung. Für $n = m$ erhalten wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(nx)^2\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{n}\sin(nx)\cos(nx)\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos(nx)^2\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \int_0^{2\pi}(1-\sin(nx)^2)\,\mathrm{d}x \\ &= x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin(nx)^2\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi - \int_0^{2\pi}\sin(nx)^2\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$2\int_0^{2\pi}\sin(nx)^2\,\mathrm{d}x = 2\pi\,.$$

Angenommen, $n \neq m$. Dann erhalten wir mit zweimaliger partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{n}\cos(nx)\sin(mx)\Big|_0^{2\pi} + \frac{m}{n}\int_0^{2\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{m}{n^2}\sin(xn)\cos(mx)\Big|_0^{2\pi} + \frac{m^2}{n^2}\int_0^{2\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{m^2}{n^2}\int_0^{2\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Wegen $\frac{m^2}{n^2} \neq 1$ folgt aus dieser Gleichung $\int_0^{2\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = 0$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

genau dann existiert, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Stelle $z_0 > a$ gibt, so dass

$$(*) \qquad \left|\int_s^t f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \quad \text{für alle } z_0 < s < t\,.$$

Lösung. Nehmen wir zuerst an, dass

$$c := \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{z\to\infty}\int_a^z f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $z_0 > a$ mit

$$\left|\int_a^z f(x)\,\mathrm{d}x - c\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } z \geq z_0\,.$$

Für $z_0 < s < t$ folgt

$$\left|\int_s^t f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^s (x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x - c\right| + \left|\int_a^s f(x)\,\mathrm{d}x - c\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Umgekehrt gelte $(*)$. Um zu zeigen, dass $\lim_{z\to\infty}\int_a^z f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert, betrachten wir eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zahlen größer a und setzen

$$c_n := \int_a^{z_n} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Nach $(*)$ ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und somit existiert $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{z\to\infty}\int_a^z f(x)\,\mathrm{d}x$.