Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

14.07.2010

13. Tutorium Analysis II

Sommersemester 2010

(T13.1) (Lebesgue-Nullmengen)

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Lebesgue-Nullmenge* oder *Menge vom Lebesgue-Maß* 0 in $\mathbb{R}^n$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ abzählbar viele abgeschlossene Rechtecke $R_i \subseteq \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, mit

$$M \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} R_i \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=0}^{\infty} |R_i| < \varepsilon$$

gibt. (Offensichtlich dürfen die Rechtecke auch offen gewählt werden, denn zu einem abgeschlossenen Rechteck R und zu $\delta > 0$ gibt es ein abgeschlossenes Rechteck R_δ mit $R^\circ \subseteq R \subseteq R_\delta^\circ$ und $|R_\delta^\circ| := |R_\delta| = (1+\delta)|R|$.)

Zeigen Sie:

(i) Seien $M_j \subseteq \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$, Lebesgue-Nullmengen in $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\bigcup_{j=0}^{\infty} M_j$ eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

(ii) Die Menge $\mathbb{Q}^n$ ist eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

(iii) Sei $R \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Rechteck und sei $f : R \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist der Graph
$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in R\}$$
eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+1}$.

(iv) Der Einheitskreis $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ ist in $\mathbb{R}^2$ eine Lebesgue-Nullmenge.

Lösung.

(i) Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ ist M_j eine Lebesgue-Nullmenge, also gibt es Rechtecke $R_j^i \subseteq \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, mit

$$M_j \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} R_j^i \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=0}^{\infty} |R_j^i| < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Folglich wird $M := \bigcup_{j=0}^{\infty} M_j$ durch die Vereinigung der abzählbar vielen Rechtecke R_j^i, $j \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$, überdeckt. Außerdem gilt für jede endliche Teilauswahl der R_j^i

$$\sum_{i,j} |R_j^i| \le \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} |R_j^i| \le \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = 2\varepsilon.$$

Also ist $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} |R_j^i| \le 2\varepsilon$ unabhängig von der gewählten Abzählung der R_j^i.

(ii) $\mathbb{Q}^n$ ist abzählbar, und für jedes $a \in \mathbb{Q}^n$ ist $\{a\} \subseteq \mathbb{R}^n$ offensichtlich eine Lebesgue-Nullmenge. Also folgt die Behauptung aus (i).

(iii) Sei $\varepsilon > 0$. Das Riemannsche Integrabilitätskriterium impliziert, dass es eine Partition P von R mit

$$O(P,f) - U(P,f) = \sum_{S \in P} |S| \, (\sup f(S) - \inf f(S)) < \varepsilon \tag{1}$$

gibt. Die Vereinigung aller kartesischen Produkte

$$S \times [\inf f(S), \sup f(S)] \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

ist offenbar eine Überdeckung von $G(f)$ aus endlich vielen abgeschlossenen Rechtecken und nach (1) gilt

$$\sum_{S \in P} |S \times [\inf f(S), \sup f(S)]| < \varepsilon.$$

Also ist $G(f)$ eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+1}$.

(iv) Es gilt
$$x^2 + y^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(x \in [-1,1] \text{ und } y = \pm\sqrt{1-x^2}\Big).$$
Man setze $f_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ und $f_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$. Dann gilt $S^1 = G(f_1) \cup G(f_2)$. Da f_1 und f_2 stetig sind, sind sie Riemann-integrierbar auf $[-1,1]$. Mit (iii) sehen wir, dass $G(f_1)$ und $G(f_2)$ Lebesgue-Nullmengen sind. Gleiches gilt dann auch für deren Vereinigung S^1.

■

(T13.2) (Lebesguesches Integrabilitätskriterium)

Sei $R \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Rechteck und sei $f : R \to \mathbb{R}$ beschränkt. Die Funktion f heißt *fast überall stetig*, falls es eine Menge $M \subseteq R$ gibt, die in $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-Maß 0 hat, so dass f in allen Punkten von $R \setminus M$ stetig ist.

Zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist, wenn sie fast überall stetig ist.

(Man kann auch die Umkehrung zeigen: Falls f Riemann-integrierbar ist, ist sie fast überall stetig.)

Lösung.

Sei $M \subseteq R$ die Lebesgue-Nullmenge aller Unstetigkeitspunkte von f. Dann gibt es zu gewähltem $\varepsilon > 0$ abzählbar viele offene (!) Rechtecke $(R_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$$M \subseteq \bigcup_{j=0}^{\infty} R_j \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=0}^{\infty} |R_j| < \varepsilon.$$

Weiterhin gibt es zu jedem Stetigkeitspunkt $x \in R \setminus M$ von f ein offenes (!) Rechteck U_x mit $x \in U_x$, so dass

$$(\forall x', x'' \in \overline{U_x} \cap R)(|f(x') - f(x'')| < \varepsilon)$$

gilt. Folglich ist

$$R \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j \cup \bigcup_{x\in R\setminus M} U_x.$$

Da aber R kompakt ist, reichen endlich viele R_j, $0 \le j \le N$, und $U_i := U_{x_i}$, $0 \le i \le N$, zur Überdeckung von R aus:

$$R \subseteq \bigcup_{j=0}^{N} R_j \cup \bigcup_{i=0}^{N} U_i.$$

Um das Riemannsche Integrabilitätskriterium zu erfüllen, wähle man eine Partition P von R derart, dass jedes $S \in P$ vollständig in (mindestens) einer Menge $\overline{R_j}$ oder $\overline{U_i}$ liegt. Dann gilt

$$O(P, f) - U(P, f) = \sum_{S\in P} |S| \; (\sup f(S) - \inf f(S)) =: \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

wobei

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \text{Summe aller Terme, für die } S \text{ in einem } \overline{R_j} \text{ liegt,} \\ \Sigma_2 &= \text{Summe aller anderen Terme.} \end{aligned}$$

Jetzt werden Σ_1 und Σ_2 wie folgt abgeschätzt:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\le 2\|f\|_\infty \sum_{j=0}^{N} \sum_{S\subseteq\overline{R_j}} |S| \;\le\; 2\|f\|_\infty \sum_{j=0}^{N} |R_j| \;<\; 2\|f\|_\infty \varepsilon, \\ \Sigma_2 &\le \varepsilon \sum_{S\in P} |S| = \varepsilon |R|; \end{aligned}$$

dabei wird für Σ_2 ausgenutzt, dass jede dort auftretende Menge S ganz in einer der Mengen $\overline{U_i}$ liegt und folglich

$$\sup f(S) - \inf f(S) \le \varepsilon$$

gilt. Fasst man beide Abschätzungen zusammen, erhält man

$$O(P, f) - U(P, f) < \varepsilon(2\|f\|_\infty + |R|)$$

und somit die Riemann-Integrierbarkeit von f.

■