Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2010

Analysis II

Tutorium 12

Aufgabe 1

Berechnen Sie das Maximum der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := e^{-x^2 y}$$

unter der Nebenbedingung, daß $x^2 + 2y^2 = 1$.
Lösung. Da $M := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1 \}$ kompakt und f stetig ist, nimmt f sein Maximum auf M an. Wir können die Nebenbedingung schreiben als $g(x, y) = 0$ mit $g(x, y) := x^2 + 2y^2 - 1$. Es gilt

$$\operatorname{grad} g = (2x, 4y) \neq (0, 0) \quad \text{für } (x, y) \in M .$$

Nach §9 Satz 1 gilt für das Maximum

$$\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g$$

für geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$. Diese Gleichung liefert

$$-2xye^{-x^2 y} = \lambda \cdot 2x \quad \text{und} \quad -x^2 e^{-x^2 y} = \lambda \cdot 4y .$$

Für $x \neq 0$ ist nach der ersten Gleichung

$$\lambda = -ye^{-x^2 y} .$$

Die zweite Gleichung liefert

$$-x^2 e^{-x^2 y} = -4y^2 e^{-x^2 y} .$$

Also gilt $x^2 = 4y^2$ und $x = \pm 2y$. Setzen wir dies in die Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ ein, erhalten wir

$$4y^2 + 2y^2 = 1,$$

und somit $y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Für den Fall, daß $x = 0$, liefert die Nebenbedingung $2y^2 = 1$, also $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Wir erhalten somit sechs Kandidaten für das Maximum:

$$\Big(\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}\Big) \quad \Big(-\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}\Big) \quad \Big(-\tfrac{2}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}\Big) \quad \Big(\tfrac{2}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}\Big) \quad \Big(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big) \quad \Big(0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big) .$$

Die Funktionswerte von f an diesen Stellen sind

$$e^{-\frac{4}{6\sqrt{6}}} \quad e^{-\frac{4}{6\sqrt{6}}} \quad e^{\frac{4}{6\sqrt{6}}} \quad e^{\frac{4}{6\sqrt{6}}} \quad e^0 \quad e^0 .$$

Somit ist $e^{\frac{4}{6\sqrt{6}}}$ das Maximum von f. Es wird an den Stellen $\big(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\big)$ und $\big(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\big)$ angenommen.

Aufgabe 2

Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2$ die Funktionen mit

$$f(x,y) := (-y,x) \quad \text{und} \quad \gamma(t) := \begin{cases} (1,\ 2t-1) & \text{für } t \in [0,1] \\ (1-2(t-1),\ 1) & \text{für } t \in [1,2] \\ (-1,\ 1-2(t-2)) & \text{für } t \in [2,3] \\ (2(t-3)-1,\ -1) & \text{für } t \in [3,4] \end{cases}$$

(γ ist also eine geschlossene quadratische Kurve um den Ursprung mit Seitenlänge 2.) Berechnen Sie

$$\int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x \,.$$

Lösung. Wir teilen γ in die einzelnen Seiten $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ auf um stetig differenzierbare Kurven zu erhalten. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x &= \int_{\gamma_1} f(x) \cdot \mathrm{d}x + \int_{\gamma_2} f(x) \cdot \mathrm{d}x + \int_{\gamma_3} f(x) \cdot \mathrm{d}x + \int_{\gamma_4} f(x) \cdot \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_2^3 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t + \int_3^4 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f(1,2t-1) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{d}t + \int_1^2 f(1-2(t-1),\ 1) \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_2^3 f(-1,\ 1-2(t-2)) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{d}t + \int_3^4 f(2(t-3)-1,\ -1) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (-2t+1,1) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{d}t + \int_1^2 (-1,1-2(t-1)) \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_2^3 (-1+2(t-2),-1) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{d}t + \int_3^4 (1,2(t-3)-1) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 2\,\mathrm{d}t + \int_1^2 2\,\mathrm{d}t + \int_2^3 2\,\mathrm{d}t + \int_3^4 2\,\mathrm{d}t \\
&= 8
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, daß

$$\int_\gamma \operatorname{grad} f(x) \cdot \mathrm{d}x = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \,.$$

Hinweis. Benutzen Sie die Kettenregel.
Lösung.

$$\int_\gamma \operatorname{grad} f(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_a^b \operatorname{grad} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)(t)\,\mathrm{d}t = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \,.$$