Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

30.06.2010

11. Tutorium Analysis II
Sommersemester 2010

(T11.1)

Es sei $A :]0,1[\to \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & d(t) \end{pmatrix}.$$

Angenommen, die Matrix $A(t)$ hat für jedes $t \in]0,1[$ zwei verschiedene reelle Eigenwerte $\lambda_1(t) < \lambda_2(t)$. Zeigen Sie

(i) durch explizite Berechnung der Eigenwerte,

(ii) durch Verwendung des Satzes über implizite Funktionen,

dass die Abbildungen $\lambda_1, \lambda_2 :]0,1[\to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind.

Sie können in (ii) ohne Beweis verwenden, dass λ_1 und λ_2 stetig sind.

Lösung.

(i) Zur Berechnung der Eigenwerte betrachten wir

$$\det(\lambda I_2 - A(t)) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a(t) & -b(t) \\ -b(t) & \lambda - d(t) \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a(t)+d(t))\,\lambda + a(t)d(t) - b(t)^2.$$

Dieser Ausdruck ist genau dann Null, wenn

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_1(t) = \frac{a(t)+d(t)}{2} - \sqrt{\frac{(a(t)+d(t))^2}{4} + b(t)^2 - a(t)d(t)} \\ &= \frac{1}{2}\Big(a(t) + d(t) - \sqrt{(a(t)-d(t))^2 + 4b(t)^2}\Big) \end{aligned}$$

oder

$$\lambda = \lambda_2(t) = \frac{1}{2}\Big(a(t) + d(t) + \sqrt{(a(t)-d(t))^2 + 4b(t)^2}\Big)$$

ist. Da die Matrix symmetrisch ist, ist der Ausdruck unter der Wurzel immer ≥ 0, nach Voraussetzung ist er sogar immer > 0, denn sonst wäre $\lambda_1(t) = \lambda_2(t)$. Damit sind die expliziten Ausdrücke für λ_1 und λ_2 offensichtlich nach t stetig differenzierbar.

(ii) Zur Anwendung des Satzes über implizit definierte Funktionen definieren wir eine Funktion $F :]0,1[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F(t,\lambda) = \det(\lambda I_2 - A(t)),$$

d. h. $F(t,\cdot)$ ist das charakteristische Polynom von $A(t)$.

Nach unserer Berechnung in (i) gilt dann

$$F(t,\lambda) = \lambda^2 - (a(t)+d(t))\,\lambda + a(t)d(t) - b(t)^2$$

und F ist stetig differenzierbar.

Sei nun $(t_0,\lambda_0) \in]0,1[\times \mathbb{R}$ ein Punkt mit $F(t_0,\lambda_0) = 0$, d. h. λ_0 ist Eigenwert von $A(t_0)$. Wir nehmen an, es wäre $D_2F(t_0,\lambda_0) = 0$. Dann gilt wegen

$$D_2F(t,\lambda) = 2\lambda - a(t) - d(t)$$

sofort $2\lambda_0 = a(t_0) + d(t_0)$ und damit

$$0 = F(t_0,\lambda_0) = \lambda_0^2 - 2\lambda_0^2 + a(t_0)d(t_0) - b(t_0)^2 \quad\Longleftrightarrow\quad \lambda_0^2 = a(t_0)d(t_0) - b(t_0)^2.$$

Für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$F(t_0,\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda_0\lambda + \lambda_0^2 = (\lambda - \lambda_0)^2,$$

d. h. λ_0 ist doppelter Eigenwert von $A(t_0)$ und das war ja gerade ausgeschlossen.

Also muss $D_2F(t_0,\lambda_0) \neq 0$ sein und der Satz über implizit definierte Funktionen liefert uns ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutige stetig differenzierbare Funktion

$$\lambda :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$$

mit $\lambda(t_0) = \lambda_0$ und

$$F(t,\lambda(t)) = 0 \quad \text{für alle } t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[,$$

d. h. für jedes $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ ist $\lambda(t)$ ein Eigenwert von $A(t)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\lambda = \lambda_1$ oder $\lambda = \lambda_2$ auf dem ganzen Intervall $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ gilt. Dazu nehmen wir an, es wäre $\lambda(s_1) = \lambda_1(s_1)$ and $\lambda(s_2) = \lambda_2(s_2)$ für s_1, s_2 aus diesem Intervall und betrachten die Funktion $g :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$ mit $g(s) = 2\lambda(s) - \lambda_1(s) - \lambda_2(s)$. Dann ist g stetig (da λ_1 und λ_2 stetig sind) und es gilt nach der Definition von λ_1 und λ_2

$$g(s_1) = 2\lambda(s_1) - \lambda_1(s_1) - \lambda_2(s_1) = \lambda_1(s_1) - \lambda_2(s_1) < 0$$

und

$$g(s_2) = 2\lambda(s_2) - \lambda_1(s_2) - \lambda_2(s_2) = \lambda_2(s_2) - \lambda_1(s_2) > 0.$$

Also gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein s' zwischen s_1 und s_2 mit $g(s') = 0$ und damit

$$\lambda(s') = \frac{\lambda_1(s') + \lambda_2(s')}{2}.$$

Da aber $\lambda(s')$ immer noch ein Eigenwert von $A(s')$ sein muss, muss dann $\lambda(s') = \lambda_1(s')$ oder $\lambda(s') = \lambda_2(s')$ gelten. In beiden Fällen bekommen wir den Widerspruch $\lambda(s') = \lambda_1(s') = \lambda_2(s')$.

■

(T11.2)

Es sei $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $p_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_a(x) = \sum_{k=0}^n a_k\, x^k$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Sei weiter $x_0 \in \mathbb{R}$ eine einfache Nullstelle von p_a. Gegeben $b = (b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ definieren wir

$$p_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad p_b(x) := \sum_{k=0}^{n} b_k\, x^k.$$

(i) Zeigen Sie, dass für b in einer hinreichend kleinen Umgebung von a auch das Polynom p_b eine eindeutige einfache Nullstelle $\varphi(b)$ nahe bei x_0 besitzt. Zeigen Sie, dass die so definierte Funktion φ in einer hinreichend kleinen Umgebung von a stetig differenzierbar ist.

(ii) Man zeige: Besitzt p_a genau n verschiedene Nullstellen, so haben auch die Polynome p_b mit b hinreichend nahe bei a genau n verschiedene Nullstellen.

Lösung.

(i) Wir betrachten die stetig differenzierbare Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \quad f(x, b) := p_b(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k\, x^k\,.$$

Dann ist $f(x, a) = p_a(x)$, somit $f(x_0, a) = p_a(x_0) = 0$ und

$$D_1 f(x_0, a) = p_a'(x_0) \neq 0, \tag{1}$$

da x_0 eine einfache Nullstelle von p_a ist. Nach dem Satz über implizite Funktionen lässt sich die Gleichung $f(x, b) = 0$ für (x, b) nahe (x_0, a) eindeutig nach $x =: \varphi(b)$ auflösen und die erhaltene Funktion φ ist nahe a stetig differenzierbar.

Wegen

$$0 = f(\varphi(b), b) = p_b(\varphi(b))$$

ist dann $\varphi(b)$ eine Nullstelle von p_b. Da $D_1 f$ und φ stetig sind, schließen wir aus (1), dass

$$p_b'(\varphi(b)) = D_1 f(\varphi(b), b) \neq 0$$

für b nahe a. Für diese b ist dann also $\varphi(b)$ tatsächlich eine *einfache* Nullstelle von p_b.

(ii) Sind $x_1, \dots, x_n$ die verschiedenen einfachen Nullstellen von p_a, so liefert Teil (i) ein $\varepsilon > 0$ und stetig differenzierbare Funktionen

$$\varphi_j\colon B_\varepsilon(a) \to \mathbb{R} \qquad \text{für } j = 1, \dots, n$$

derart, dass $\varphi_j(a) = x_j$ für alle j und $p_b(\varphi_j(b)) = 0$ für alle $b \in B_\varepsilon(a) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ (der euklidischen Kugel im $\mathbb{R}^{n+1}$ vom Radius ε um a). Wir setzen

$$\delta := \min\{\|x_i - x_j\|_2 \colon i \neq j\}.$$

Nach Verkleinern von ε gilt dann $\varphi_j(b) \in B_{\delta/2}(x_j)$ für alle $j = 1, \dots, n$ und alle $b \in B_\varepsilon(a)$. Folglich sind $\varphi_1(b), \dots, \varphi_n(b)$ paarweise verschieden. Jede der Nullstellen $\varphi_1(b), \dots, \varphi_n(b)$ von p_b ist also einfach.

■