Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010

Analysis II

Tutorium 10

Aufgabe 1

Sei $D := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le 1 \}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x,y) := x - (y - x^3)^2.$$

Finden Sie alle Extrema von f.
Lösung. grad $f = 0$ liefert

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = -2(y - x^3)\,.$$

Also $y = x^3$. Wegen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, x^3) = 1 - 2(x^3 - x^3)(-3x^2) = 1 \neq 0$$

hat f also keine lokalen Extrema im Inneren von D. Den Rand von D besteht aus den Geraden mit $x = -1$ und $x = 1$. Wir erhalten

$$f(-1,y) = -1 - (y+1)^2 \quad \text{und} \quad f(1,y) = 1 - (y-1)^2.$$

Die Ableitungen dieser Funktionen sind

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(-1,y) = -2(y+1) = -2y - 2\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(1,y) = -2(y-1) = -2y + 2\,.$$

Hieraus ergibt sich $y = -1$ bzw. $y = 1$ für die möglichen Extrema. Wegen

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} f(-1,y) = -2 \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} f(1,y) = -2$$

kann es sich dabei um Maxima handeln. Wegen

$$f(-1,-1) = -1 - 0 = -1 \quad \text{und} \quad f(1,1) = 1 - 0 = 1$$

und, da $f(x,y) \le x \le 1$ für $x \in [-1,1]$ ist, liegt das globale Maximum also bei $(1,1)$. f hat kein globales Minimum.

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, und sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve, deren Punkte gerade die lokalen Minima von f sind. Zeigen Sie, daß Hess f nicht positiv definit ist.
Lösung. Da $f(\gamma(t))$ ein lokales Minimum von f ist, muß die Funktion $f \circ \gamma$ konstant sein. Also gilt

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(f \circ \gamma) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n} D_i f(\gamma(t)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} D_k D_i f(\gamma(t)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_k(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_i(t) + \sum_{i=1}^{n} D_i f(\gamma(t)) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 t}\gamma_i(t) \\ &= \big\langle D\gamma(t),\ \mathrm{Hess}\, f(\gamma(t)) D\gamma(t) \big\rangle + \sum_{i=1}^{n} D_i f(\gamma(t)) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 t}\gamma_i(t) \end{aligned}$$

Wegen grad $f = 0$ folgt hieraus

$$\langle \xi, \operatorname{Hess} f(\gamma(t))\xi \rangle = 0 \quad \text{mit } \xi := D\gamma(t)\,.$$

Also ist Hess $f(\gamma(t))$ nicht positiv definit.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle lokalen Minima der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) := (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 - 2y^2 + 2z^2$$

und zeigen Sie, daß eine Kurve γ existiert, deren Punkte gerade die lokalen Minima von f sind.
Lösung. Mit $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ erhalten wir

$$f(r, z) = r^4 - 2r^2 + 2z^2.$$

Wegen $z^2 \geq 0$ muß für ein Minimum dieser Funktion $z = 0$ gelten. Das Minimum für $r^4 - 2r^2$ ergibt sich aus

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 4r^3 - 4r = 0\,.$$

Also ist $r = 0$ oder $r = 1$. Wegen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 12r^2 - 4$$

ist nur $r = 1$ ein Minimum. Wir erhalten also $x^2 + y^2 = 1$ und $z = 0$. Dies ist der Kreis

$$\gamma(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\,.$$