Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

16.06.2010

9. Tutorium Analysis II
Sommersemester 2010

(T9.1)

Beweisen Sie §7 Satz 1 aus Forster, *Analysis 2*:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor derart, dass die Strecke $x + t\xi$, $0 \le t \le 1$, ganz in U liegt. Dann ist die Funktion

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad g(t) := f(x + t\xi),$$

k-mal stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (D^\alpha f)(x + t\xi)\xi^\alpha.$$

Lösung.

Siehe §7 Satz 1 in Forster, *Analysis 2*.

■

(T9.2)

Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$D_1 f(x,y) = xy \quad \text{und} \quad D_2 f(x,y) = y^2 \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Lösung.

Es gibt *keine* differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit den geforderten ersten Ableitungen.

Gäbe es eine solche Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so wären die ersten partiellen Ableitungen offensichtlich auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig und ebenso die zweiten. Die Funktion wäre also zweimal stetig partiell differenzierbar. Außerdem wäre

$$D_2 D_1 f(x,y) = x \neq 0 = D_1 D_2 f(x,y),$$

was dem Satz von Schwarz widerspricht.

■

(T9.3)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ heißt *positiv homogen* vom *Grade* $\alpha \in \mathbb{R}$, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und alle $t > 0$ gilt

$$f(tx) = t^\alpha f(x).$$

Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und homogen vom Grade α, so gilt die *Eulersche Relation*

$$\langle \operatorname{grad} f(x), x\rangle = \alpha f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Lösung.

Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\phi(t) := f(tx)$. Dann gilt wegen

$$f(tx) = t^\alpha f(x) \tag{1}$$

für die Ableitung

$$\phi'(t) = \alpha t^{\alpha-1} f(x) \tag{2}$$

und

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt} f(tx) = Df(tx) \cdot x = \langle \nabla f(tx), x\rangle. \tag{3}$$

Somit ergibt sich

$$\langle \nabla f(tx), tx\rangle \overset{(3)}{=} t\phi'(t) \overset{(2)}{=} \alpha t^\alpha f(x) \overset{(1)}{=} \alpha f(tx), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Die Wahl $t = 1$ liefert die Behauptung.

■