Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010

Analysis II
Tutorium 8

Aufgabe 1

Wir betrachten zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f$ für

$$f(x, y, z) := (x, xy, 1) .$$

(b) Zeigen Sie, daß man $\operatorname{rot} f$ formal als Determinante

$$\det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$$

schreiben kann, wobei e_1, e_2, e_3 die Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^3$ sind.

(c) Zeigen Sie, daß $\operatorname{div}\operatorname{rot} f = 0$.

(d) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f(x, y, z) = (x^2 y, z, xyz)$$

nicht von der Form $f = \operatorname{rot} g$ für ein $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist.

Lösung. (a)

$$\operatorname{rot} f = \left(\tfrac{\partial}{\partial y} 1 - \tfrac{\partial}{\partial z}(xy),\ \tfrac{\partial}{\partial z} x - \tfrac{\partial}{\partial x} 1,\ \tfrac{\partial}{\partial x}(xy) - \tfrac{\partial}{\partial y} x \right) = (0, 0, y) .$$

(b) Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} = (D_2 f_3 - D_3 f_2) e_1 - (D_1 f_3 - D_3 f_1) e_2 + (D_1 f_2 - D_2 f_1) e_3 = \operatorname{rot} f .$$

(c) Nach §5 Satz 1 gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\operatorname{rot} f &= \operatorname{div}\big(D_2 f_3 - D_3 f_2,\ D_3 f_1 - D_1 f_3,\ D_1 f_2 - D_2 f_1\big) \\ &= D_1(D_2 f_3 - D_3 f_2) + D_2(D_3 f_1 - D_1 f_3) + D_3(D_1 f_2 - D_2 f_1) = 0 . \end{aligned}$$

(d)

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y) + \frac{\partial}{\partial y}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = 2xy + 0 + xy = 3xy \neq 0 .$$

Also folgt die Behauptung aus (c).

Aufgabe 2

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := 2xy + 1$$

Für $c \in \mathbb{R}$ sei

$$H_c := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c \}$$

die Höhenlinie zur Höhe c.

(a) Berechnen Sie zu jedem Paar $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x_0, y_0) \neq 1$ eine Gleichung für die Tangente von H_c im Punkt (x_0, y_0), wobei $c := f(x_0, y_0)$.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst, daß es sich bei H_c um eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ handelt. In Parameterform können wir die Tangente $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ an diese Kurve im Punkt (x_0, y_0) schreiben als

$$\tau(\lambda) := (x_0 + \lambda u, y_0 + \lambda v)$$

für geeignete $u, v \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie, daß grad f senkrecht auf dieser Tangente steht, d. h. daß $uD_1 f + vD_2 f = 0$.

Lösung. (a) Wir lösen $2xy + 1 = 2x_0 y_0 + 1$ nach y auf und erhalten wegen $f(x_0, y_0) \neq 1$ die Gleichung

$$y = \frac{x_0 y_0}{x}\,.$$

Dies ist eine Hyperbel mit Steigung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{x_0 y_0}{x} = -\frac{x_0 y_0}{x^2}\,.$$

Für $u = 1$ erhalten wir somit

$$v = -\frac{x_0 y_0}{x_0^2} = -\frac{y_0}{x_0}\,.$$

Also ist

$$\tau(\lambda) = \left(x_0 + \lambda,\ y_0 - \tfrac{y_0}{x_0}\lambda\right).$$

(b)

$$uD_1 f + vD_2 f = 1 \cdot 2y_0 - \frac{y_0}{x_0} \cdot 2x_0 = 2y_0 - 2y_0 = 0\,.$$