Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

02.06.2010

7. Tutorium Analysis II
Sommersemester 2010

Flächenfüllende Kurven

Obwohl dies paradox erscheinen mag, gibt es Kurven, welche höher-dimensionale Objekte wie Quadrate oder Würfel vollständig ausfüllen. Erste Beispiele solcher Kurven wurden 1890 von G. Peano konstruiert; man nennt sie heute flächenfüllende (bzw. raumfüllende) Kurven, oder auch *Peano-Kurven*. Weitere Beispiele gehen zurück auf D. Hilbert (1891), E.H. Moore (1900), H. Lebesgue (1904), W. Sierpiński (1912), G. Pólya (1913) und andere. Ein Standardwerk über das Thema ist H. Sagan, *Space-filling curves*, Springer-Verlag, 1994.

Im folgenden präsentieren wir eine von I.J. Schoenberg (1938) beschriebene Variante von Lebesgues flächenfüllender Kurve.

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gerade, 2-periodische Funktion, welche festgelegt ist durch

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ 3t-1 & \text{für } \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3} \\ 1 & \text{für } \frac{2}{3} \le t \le 1 \end{cases}, \quad f(-t) = f(t),\ f(t+2) = f(t).$$

Wir setzen

$$x(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(3^{2k}t)}{2^k}, \quad y(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(3^{2k+1}t)}{2^k}.$$

Die Schoenberg-Kurve ist definiert als $\gamma_{sc} : [0,1] \to [0,1]^2$, $\gamma_{sc}(t) = (x(t), y(t))$.

(T7.1)

Man zeige:

(a) Für alle $t \in [0,1]$ ist tatsächlich $\gamma_{sc}(t) \in [0,1]^2$.

(b) Die Funktion γ_{sc} ist stetig.

Hinweis: Benutzen Sie das Konvergenzkriterium von Weierstraß.

(c) Die Funktion γ_{sc} ist surjektiv.

Hinweis: Sei $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$. Man betrachte dyadische Entwicklungen von x_0 und y_0 (vgl. Forster, *Analysis I*, Seite 46 f.):

$$x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2^{k+1}}, \quad y_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{2^{k+1}}, \quad a_k, b_k \in \{0,1\}.$$

Man definiere $t_0 = \frac{2a_0}{3} + \frac{2b_0}{3^2} + \frac{2a_1}{3^3} + \frac{2b_1}{3^4} + \ldots$ und prüfe nach, dass $f(3^{2k}t_0) = a_k$ und $f(3^{2k+1}t_0) = b_k$.

Lösung.

(a) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ seien $\phi_k, \psi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\phi_k(t) = \frac{f(3^{2k}t)}{2^k}, \quad \psi_k(t) = \frac{f(3^{2k+1}t)}{2^k}.$$

Sei $t \in \mathbb{R}$. Da $f(t) \in [0,1]$ erhalten wir $0 \le \phi_k(t), \psi_k(t) \le \frac{1}{2^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ konvergiert und $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$, ist das Majorantenkriterium anwendbar; es zeigt, dass die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(t), \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(t)$ konvergieren und dass

$$0 \le x(t), y(t) \le \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

also $\gamma_{sc}(t) \in [0,1]^2$.

(b) Seien $\phi_k, \psi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie oben definiert. Dann gilt $0 \le \phi_k(t), \psi_k(t) \le \frac{1}{2^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$ und somit $\|\phi_k\|_\infty, \|\psi_k\|_\infty \le \frac{1}{2^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k < \infty$, also können wir das Konvergenzkriterium von Weierstraß anwenden. Es folgt, dass die Funktionenreihen $\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k, \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k$ gleichmäßig konvergieren. Man sieht leicht ein, dass f stetig ist. Daher sind auch die Funktionen ϕ_k und ψ_k für alle $k \in \mathbb{N}$ stetig. Da eine Summe gleichmäßig konvergenter Reihen stetiger Funktionen stetig ist, sind die beiden Funktionen x und y und somit auch γ_{sc} stetig.

(c) Für $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ betrachten wir 2-adischen Entwicklungen von x_0 und y_0:

$$x_0 = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{2^2} + \ldots + \frac{a_k}{2^{k+1}} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2^{k+1}}, \quad a_k \in \{0,1\},$$
$$y_0 = \frac{b_0}{2} + \frac{b_1}{2^2} + \ldots + \frac{b_k}{2^{k+1}} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{2^{k+1}}, \quad b_k \in \{0,1\}.$$

Wir definieren $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch $c_{2k} := a_k$ und $c_{2k+1} := b_k$ für $k \in \mathbb{N}$. Da

$$\frac{2c_k}{3^{k+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{c_k}{3^k} \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^k}$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ und die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ gegen $\frac{3}{2}$ konvergiert, ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2c_k}{3^{k+1}}$ auch konvergent. Wir können also

$$t_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2c_k}{3^{k+1}},$$

setzen, und es gilt $0 \leq t_0 \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$. Wir zeigen nun, dass $\gamma_{sc}(t_0) = (x_0, y_0)$. Zunächst beobachten wir, dass

$$\begin{aligned} 3^k t_0 &= \text{eine gerade Zahl}(= 2p) + \frac{2c_k}{3} + \frac{2c_{k+1}}{3^2} + \frac{2c_{k+2}}{3^3} + \dots \\ &= 2p + \frac{2c_k}{3} + \frac{2}{3^2}\left(c_{k+1} + \frac{c_{k+2}}{3} + \dots\right) \end{aligned}$$

ist. Wir setzen

$$\alpha = \frac{2c_k}{3} + \frac{2}{3^2}\left(c_{k+1} + \frac{c_{k+2}}{3} + \dots\right).$$

Dann ist $\alpha \geq \frac{2c_k}{3}$ und

$$\alpha \leq \frac{2c_k}{3} + \frac{2}{3^2}\left(1 + \frac{1}{3} + \dots\right) = \frac{2c_k}{3} + \frac{2}{3^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k} = \frac{2c_k}{3} + \frac{2}{3^2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2c_k}{3} + \frac{1}{3}.$$

Somit gilt $\alpha \in \left[\frac{2c_k}{3}, \frac{2c_k}{3} + \frac{1}{3}\right]$. Da f eine 2-periodische Funktion ist, folgt sofort durch Induktion nach n, dass $f(2n + t) = f(t)$ für alle $n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$. Also ist $f\left(3^k t_0\right) = f(2p + \alpha) = f(\alpha)$.

Falls $c_k = 0$, so ist $\alpha \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ und somit $f\left(3^k t_0\right) = f(\alpha) = 0$. Falls $c_k = 1$, so ist $\alpha \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ und somit $f\left(3^k t_0\right) = f(\alpha) = 1$. Also ist $f\left(3^k t_0\right) = c_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit folgt

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(3^{2k}t_0)}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_{2k}}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2^{k+1}} = x_0, \\ y(t_0) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(3^{2k+1}t_0)}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_{2k+1}}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{2^{k+1}} = y_0. \end{aligned}$$

■

(T7.2)

Man zeige:

Das Bild einer rektifizierbaren Kurve in $\mathbb{R}^2$ kann nicht das Quadrat $[0,1]^2$ enthalten.

Es folgt, dass γ_{sc} nicht rektifizierbar ist.

Lösung.

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine Kurve mit $Q := [0,1]^2 \subseteq \gamma([a,b])$. Wir zeigen, dass γ nicht rektifizierbar ist. Gegeben $n \in \mathbb{N}^*$ betrachten wir die durch

$$M := \left\{\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) : 0 \leq p, q \leq n\right\}$$

definierte Teilmenge von Q. Dann besteht M aus $(n+1)^2$ Punkten. Da $M \subseteq Q \subseteq \gamma([a,b])$, existieren Elemente $t_1 < t_2 < \ldots < t_{(n+1)^2}$ von $[a,b]$ mit $\gamma(\{t_1, \ldots, t_{(n+1)^2}\}) = M$. Man beachte, dass $\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 \geq \frac{1}{n}$, denn der euklidische Abstand zweier verschiedener Punkte von M ist mindestens $\frac{1}{n}$. Sei $\delta > 0$. Es sei nun $P = \{s_0, \ldots, s_k\}$ mit $s_0 < \ldots < s_k$ eine Partition von $[a,b]$ mit Feinheit $< \delta$ und derart, dass $t_1, \ldots, t_{(n+1)^2}$ in P enthalten sind. Dann ist

$$\begin{aligned} p_\gamma(s_0, \ldots, s_k) &= \sum_{j=1}^{k} \|\gamma(s_j) - \gamma(s_{j-1})\|_2 \\ &\geq \sum_{j=2}^{(n+1)^2} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 \\ &\geq \sum_{j=2}^{(n+1)^2} \frac{1}{n} \\ &= \frac{(n+1)^2 - 1}{n} > n. \end{aligned}$$

Da wir also für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\delta > 0$ eine Partition $P = \{s_0, \ldots, s_k\}$ von $[a,b]$ mit Feinheit $< \delta$ und $p_\gamma(s_0, \ldots, s_k) > n$ finden können, ist γ nicht rektifizierbar.

■