Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010

Analysis II
Tutorium 6

Aufgabe 1

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } x \neq 0 \text{ oder } y \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } x = y = 0\,. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, daß für jede feste Zahl $a \in \mathbb{R}$ die Funktionen $x \mapsto f(x,a)$ und $y \mapsto f(a,y)$ stetig sind.

(b) Zeigen Sie, daß die Funktion f im Punkt 0 unstetig ist.

Lösung. (a) Wegen $f(x,y) = f(y,x)$ handelt es sich bei $x \mapsto f(x,a)$ und $y \mapsto f(a,y)$ um dieselbe Funktion. Wir bezeichnen sie mit $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für $x_0 \neq 0$ gibt es eine offene Umgebung U von x_0 mit $0 \notin U$ und

$$g_a(x) = \frac{ax}{x^2+a^2} \quad \text{für alle } x \in U\,.$$

Also entspricht g_a auf U einer rationalen Funktion und ist somit stetig in x_0.

Für $x_0 = 0$ betrachten wir $\lim_{x\to 0} g_a(x)$. Für $a \neq 0$ gilt

$$\lim_{x\to 0} g_a(x) = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{x^2+a^2} = \frac{0}{a^2} = 0\,.$$

Für $a = 0$ folgt ebenfalls

$$\lim_{x\to 0} g_a(x) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0\,.$$

Also ist g_a auch stetig in 0.

(b) Wir betrachten die Folge $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = y_n = \frac{1}{n+1}$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} (x_n,y_n) = (0,0) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2}{1/n^2 + 1/n^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)\,.$$

Also ist f nicht stetig in 0.

Aufgabe 2

Sei X ein vollständiger metrischer Raum. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) X ist kompakt.

(2) Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X besitzt eine konvergente Teilfolge $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

(3) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Menge von Punkten $x_1, \dots, x_n \in X$ mit $X = \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$.

Lösung. (1) $\Rightarrow$ (2) Sei $(x_n)_n$ eine Folge in X. Wir definieren zunächst eine Folge $(y_m)_{m>0}$, so daß für jedes m der Schnitt

$$S_m := \bigcap_{k=1}^m B_{1/k}(y_k)$$

unendlich viele der x_n enthält.

Um y_1 zu finden betrachten wir die offene Überdeckung $(B_1(z))_{z\in X}$ von X. Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$X = B_1(z_1) \cup \cdots \cup B_1(z_k)\,.$$

Eine dieser Mengen $B_1(z_i)$ muß unendlich viele x_n enthalten. Wir wählen $y_1 := z_i$.

Angenommen, wir haben $y_1, \dots, y_m$ schon gefunden. Für y_{m+1} betrachten wir die offene Überdeckung $(B_{1/(m+1)}(z))_{z\in X}$ von X. Wieder gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$X = B_{1/(m+1)}(z_1) \cup \cdots \cup B_{1/(m+1)}(z_k)\,.$$

Somit gilt

$$S_m = (B_{1/(m+1)}(z_1) \cap S_m) \cup \cdots \cup (B_{1/(m+1)}(z_k) \cap S_m)\,.$$

Da unendliche viele x_n in S_m liegen, gibt es einen Index i, so daß unendlich viel x_n in $B_{1/(m+1)}(z_i) \cap S_m$ liegen. Wir setzen $y_{m+1} := z_i$.

Um die gewünschte Teilfolge $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ zu erhalten, wählen wir für k_n den kleinsten Index, so daß $k_n > k_{n-1}$ ist (falls $n > 0$) und $x_{k_n} \in S_{n+1}$ liegt. Wir zeigen, daß $(x_{k_n})_n$ eine Cauchy-Folge ist. Sie $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon/2 \geq 1/(N+1)$. Für $m, n \geq N$ folgt wegen $x_{k_m}, x_{k_n} \in S_{N+1}$, daß

$$d(x_{k_m}, x_{k_n}) \leq d(x_{k_m}, y_{N+1}) + d(y_{N+1}, x_{k_n}) < \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+1} \leq \varepsilon\,.$$

(2) ⇒ (3) Angenommen, es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß für jede endliche Menge von Punkten $x_1, \dots, x_n \in X$ gilt $\bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i) \neq X$. Per Induktion nach n wählen wir eine unendliche Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt. $x_0 \in X$ ist ein beliebiger Punkt. Haben wir $x_0, \dots, x_n$ schon gefunden, so gibt es nach Annahme mindestens einen Punkt $x_{n+1} \in X$ mit $x_{n+1} \notin \bigcup_{i=0}^n B_\varepsilon(x_i)$. Einen solchen wählen wir.

Wir erhalten eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x_n \notin \bigcup_{i=0}^{n-1} B_\varepsilon(x_i)\,.$$

Nach (2) hat diese Folge eine konvergente Teilfolge $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gibt es einen Index $N \in \mathbb{N}$ mit

$$d(x_{k_m}, x_{k_n}) < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq N\,.$$

Insbesondere haben wir also $x_{k_{N+1}} \in B_\varepsilon(x_{k_N})$. Widerspruch.

(3) ⇒ (1) Angenommen, es gibt eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X ohne endliche Teilüberdeckung. Wir konstruieren eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen $A_n \subseteq X$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\operatorname{diam}(A_n) \leq 2^{-n}$
- $A_{n+1} \cap A_n \neq \emptyset$
- Keine endliche Teilfamilie von $(U_i)_{i\in I}$ überdeckt A_n.

Nach Annahme gibt es endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_m \in X$ mit $X = \bigcup_{i=1}^m B_1(x_i)$. Da $(U_i)_{i\in I}$ keine endliche Teilüberdeckung von X enthält, gibt es einen Index k, so daß $(U_i)_{i\in I}$ keine endliche Teilüberdeckung von $B_1(x_k)$ enthält. Wir setzen $A_0 := B_1(x_k)$.

Angenommen, wir haben $A_0, \dots, A_n$ schon definiert. Es gibt endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_m \in X$ mit $A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^m B_{2^{-(n+1)}}(x_i)$. Wir können die x_i so wählen, daß $B_{2^{-(n+1)}}(x_i) \cap A_n \neq \emptyset$. Wie oben gibt es einen Index k, so daß $(U_i)_{i\in I}$ keine endliche Teilüberdeckung von $B_{2^{-(n+1)}}(x_k)$ enthält. Wir setzen $A_{n+1} := B_{2^{-(n+1)}}(x_k)$.

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ wählen wir einen beliebigen Punkt $a_n \in A_n$. Wir zeigen, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $2^{-N+2} \leq \varepsilon$. Für $m > n \geq N$ folgt

$$\begin{aligned}
d(a_n, a_m) &\leq d(a_n, a_{n+1}) + d(a_{n+1}, a_{n+2}) + \cdots + d(a_{m-1}, a_m) \\
&\leq (2^{-n} + 2^{-(n+1)}) + (2^{-(n+1)} + 2^{-(n+2)}) + \cdots + (2^{-(m-1)} + 2^{-m}) \\
&\leq 2 \cdot 2^{-n+1} = 2^{-n+2} \leq \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Da X vollständig ist, existiert $a_* := \lim_{n\to\infty} a_n$. Sei $i \in I$ ein Index mit $a_* \in U_i$. Da U_i offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a_*) \subseteq U_i$. Zu ε finden wir einen Index N mit

$$d(a_n, a_*) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } n \geq N\,.$$

Sei $m \geq N$ eine Zahl mit $2^{-m} < \varepsilon/2$. Dann ist

$$A_m \subseteq B_\varepsilon(a_*) \subseteq U_i$$

im Widerspruch zu der Wahl der A_m.