Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

19.05.2010

5. Tutorium Analysis II
Sommersemester 2010

(T5.1) (Strikt normierte Räume)

Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt *strikt normiert* oder *strikt konvex*, falls für alle $x, y \in V$ gilt

$$\left.\begin{array}{l}\|x\| \leq 1\\ \|y\| \leq 1\\ \|x-y\| > 0\end{array}\right\} \implies \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ strikt normiert ist, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ aber nicht.

(Hier ist $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ und $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$ für $x \in \mathbb{R}^n$.)

Lösung.

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_2 \leq 1$, $\|y\|_2 \leq 1$ und $\|x-y\|_2 > 0$. Die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ ist die kanonische Norm bezüglich des inneres Produkts $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ in $\mathbb{R}^n$, also gilt nach (G4.1)(c)

$$\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2,$$

d. h.

$$\|x+y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2 - \|x-y\|_2^2.$$

Also gilt

$$\|x+y\|_2 = \sqrt{2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2 - \|x-y\|_2^2},$$

und somit

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2 = \sqrt{\frac{\|x\|_2^2}{2} + \frac{\|y\|_2^2}{2} - \frac{\|x-y\|_2^2}{4}} \leq \sqrt{1 - \frac{\|x-y\|_2^2}{4}} < 1.$$

Also ist $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ strikt normiert.

Sei $x = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (1, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $x - y = (0, 1, \ldots, 1)$ und somit gilt $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$ und $\|x-y\|_\infty = 1 > 0$. Es gilt aber

$$\frac{x+y}{2} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right),$$

also ist

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_\infty = 1.$$

Daher ist $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ nicht strikt normiert.

■

(T5.2) (Orthogonale Matrizen und Kompaktheit)

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *orthogonal*, wenn $M^T = M^{-1}$ gilt, wobei M^T die transponierte Matrix von M bezeichnet.

Zeigen Sie, dass die Menge $O(n)$ der orthogonalen $n\times n$-Matrizen eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$ ist. Hierbei identifizieren wir eine $n \times n$-Matrix $M = (a_{jk})_{j,k=1}^n$ mit dem Vektor

$$(a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}.$$

Hinweis: Betrachten Sie für $1 \leq j, k \leq n$ die Abbildung $f_{jk} : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f_{jk}(M) = \sum_{l=1}^n a_{lj} a_{lk}$$

für $M = (a_{jk})_{j,k=1}^n \in \mathbb{R}^{n^2}$ gegeben ist.

Lösung.

Wir zeigen, dass $O(n)$ eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^{n^2}$ ist, dann folgt die Behauptung aus dem Satz von Heine–Borel (Forster, *Analysis 2*, § 3 Satz 5). Dazu beobachten wir zunächst, dass eine $n \times n$-Matrix M genau dann in $O(n)$ liegt, wenn $M^T M = I_n$ gilt.

Nun definieren wir für $1 \leq j, k \leq n$ die Abbildung $f_{jk} : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ aus dem Hinweis durch

$$f_{jk}(M) = \sum_{l=1}^n a_{lj} a_{lk}$$

für $M = (a_{jk})_{j,k=1}^n \in \mathbb{R}^{n^2}$. Dann ist

$$(f_{jk}(M))_{j,k=1}^n = M^T M,$$

also ist $M \in O(n)$, genau dann wenn $f_{jk}(M) = 1$ ist, wann immer $j = k$ ist und $f_{jk}(M) = 0$ im Falle $j \neq k$ gilt. Weiter ist zu bemerken, dass f_{jk} für jede Wahl von j und k offensichtlich eine stetige Abbildung ist.

Da $\{0\}$ und $\{1\}$ abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, folgt aus der zweite Bemerkung nach § 2 Satz 11, dass

$$O(n) = \left(\bigcap_{j=1}^n f_{jj}^{-1}(\{1\})\right) \cap \left(\bigcap_{1\leq j,k\leq n,\ j\neq k} f_{jk}^{-1}(\{0\})\right)$$

abgeschlossen in $\mathbb{R}^{n^2}$ ist. Es bleibt also zu zeigen, dass $O(n)$ in $\mathbb{R}^{n^2}$ beschränkt ist. Sei dazu $M = (a_{jk})_{j,k=1}^n \in O(n)$. Dann ist der Euklidische Abstand zwischen dem Punkt $(a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$ und dem Punkt $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n^2}$ gegeben durch

$$\sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^2} = \sqrt{f_{11}(M) + \ldots + f_{nn}(M)} = \sqrt{n}.$$

Also ist $O(n)$ beschränkt und der Beweis beendet.

$\blacksquare$