Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010

Analysis II

Tutorium 4

Aufgabe 1

Sei $R(a,b)$ der Raum aller Riemann-integrierbaren Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Für $f, g \in R(a,b)$ setzen wir

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad f \sim_1 g \quad :\text{gdw} \quad \|f-g\|_1 = 0\,.$$

(a) Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|_1$ keine Norm auf $R(a,b)$ ist.

(b) Zeigen Sie, daß $\sim_1$ eine Äquivalenzrelation of $R(a,b)$ ist und daß $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf dem Quotienten $R(a,b)/{\sim_1}$ induziert.

Lösung. (a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = a\,, \\ 0 & \text{für } x > a\,. \end{cases}$$

Dann ist $f \neq 0$, aber

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

(b) Offensichtlich gilt $\|f-f\|_1 = 0$ und $\|f-g\|_1 = \|g-f\|_1$. Also ist $\sim_1$ reflexiv und symmetrisch. Für Funktionen $f, g, h \in R(a,b)$ mit $\|f-g\|_1 = \|g-h\|_1 = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \|f-h\|_1 &= \int_a^b |f(x)-h(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b |f(x)-g(x)+g(x)-h(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b |g(x)-h(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= \|f-g\|_1 + \|g-h\|_1 = 0\,. \end{aligned}$$

Also ist $\sim_1$ auch transitiv und somit eine Äquivalenzrelation.

Für eine Äquivalenzklasse $[f] \in R(a,b)/{\sim_1}$ setzen wir

$$\|[f]\|_1 := \|f\|_1\,.$$

Dies ist wohl-definiert, da aus $f \sim_1 g$ folgt

$$\|f\|_1 - \|g\|_1 = \int_a^b (|f|-|g|)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f-g|\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Wir müssen noch zeigen, daß $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf $R(a,b)/{\sim_1}$ ist. Offensichtlich ist $\|[0]\|_1 = 0$. Sei umgekehrt $\|[f]\|_1 = 0$. Dann ist

$$\|f-0\|_1 = \|f\|_1 = \|[f]\|_1 = 0\,.$$

Also ist $f \sim_1 0$, d. h. $[f] = [0]$.

Desweiteren gilt

$$\|\lambda[f]\|_1 = \|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f(x)|\,\mathrm{d}x = |\lambda| \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = |\lambda| \cdot \|f\|_1 = |\lambda| \cdot \|[f]\|_1 \,.$$

Schließlich gilt

$$\|[f] + [g]\|_1 = \|f + g\|_1 = \int_a^b |f + g|\,\mathrm{d}x \le \int_a^b (|f| + |g|)\,\mathrm{d}x = \|f\|_1 + \|g\|_1 = \|[f]\|_1 + \|[g]\|_1 \,.$$

Aufgabe 2

Eine *Frechet-Norm* auf einem Vektorraum V ist eine Funktion $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\|x\| = 0$ gdw $x = 0$

(ii) $\|-x\| = \|x\|$

(iii) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

Jede Norm ist offensichtlich eine Frechet-Norm.

Eine Metrik auf einem Vektorraum V ist *translations-invariant,* wenn gilt

$$d(x + v, y + v) = d(x, y) \quad \text{für alle } x, y, v \in V \,.$$

(a) Sei $\|\cdot\|$ eine Frechet-Norm auf V. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

eine translations-invariante Metrik auf V ist.

(b) Sei $d(x, y)$ eine translations-invariante Metrik auf V. Zeigen Sie, daß

$$\|x\| := d(0, x)$$

eine Frechet-Norm auf V ist.

(c) Finden Sie eine Frechet-Norm auf $\mathbb{R}$, die keine Norm ist.

Lösung. (a) Wir haben

$$\begin{aligned}
d(x, x) &= \|x - x\| = \|0\| = 0 \,, \\
d(x, y) &= \|x - y\| = \|y - x\| = d(y, x) \,, \\
d(x, z) &= \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \le \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z) \,.
\end{aligned}$$

Desweiteren gilt

$$d(x + v, y + v) = \|x + v - (y + v)\| = \|x - y\| = d(x, y) \,.$$

(b) Wir haben

$$\|0\| = d(0, 0) = 0 \,.$$

Gilt umgekehrt $\|x\| = 0$, so ist

$$d(0, x) = \|x\| = 0 \,.$$

Hieraus folgt $x = 0$.

Weiterhin gilt

$$\|-x\| = d(0, -x) = d(0 + x, -x + x) = d(0, x) = \|x\|$$

und

$$\|x+y\| = d(0,x+y) \leq d(0,x) + d(x,x+y) = d(0,x) + d(0,y) = \|x\| + \|y\| .$$

(c) Wir setzen

$$\|x\| := \frac{|x|}{1+|x|} .$$

Wegen $\|2\| \neq 2\|1\|$ ist dies keine Norm. Durch einfaches Nachrechnen läßt sich aber zeigen, daß $\|\cdot\|$ eine Frechet-Norm ist. (Für die Dreiecksungleichung benötigen wir die Implikation $a \leq b \Rightarrow \frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$, die in letztem Semester in Tutorium 4, Aufgabe 2 (a) gezeigt wurde.)