Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

05.05.2010

3. Tutorium Analysis II

Sommersemester 2010

(T3.1) (Gleichmäßige Konvergenz und Differenzierbarkeit)

Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_n)_n$ mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

(i) Man zeige, dass $(f_n)_n$ gleichmäßig konvergiert, und man bestimme die Grenzfunktion. Ist die Grenzfunktion differenzierbar?

(ii) Man zeige, dass jedes f_n differenzierbar ist, und man bestimme den punktweisen Grenzwert der Funktionenfolge $(f_n')_n$. Liegt hier gleichmäßige Konvergenz vor?

Lösung.

(i) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = |x|$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = |x|$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \;=\; \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|\right| \;=\; \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \;\leq\; \frac{1}{n\sqrt{\frac{1}{n}}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Daher ist die Konvergenz gleichmäßig. Die Grenzfunktion f ist aber nicht differenzierbar.

(ii) Jedes f_n ist als Verknüpfung stetig differenzierbarer Funktionen stetig differenzierbar. Es gilt

$$f_n'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ 1 & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Die Grenzfunktion ist nicht stetig. Daher ist die Konvergenz nicht gleichmäßig (vgl. auch § 21 Satz 5).

(T3.2) (Taylor-Reihen)

Bestimmen Sie den Wert $\sqrt{2} = \frac{7}{5}(1 - \frac{1}{50})^{-1/2}$ bis auf einen Fehler, der kleiner oder gleich 10^{-5} ist, durch ein geeignetes Taylor-Polynom.

Lösung.

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{7}{5}(1-x)^{-1/2}, \quad x \in [0, 1/50]\,,$$

und ihre Taylorpolynome $T_n[f,0](x)$ mit Entwicklungstelle 0. Dann gilt $\sqrt{2} = f(1/50)$. Da

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{7}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1-x)^{-3/2}(-1) = \frac{7}{10}(1-x)^{-3/2}, \\ f''(x) &= \frac{21}{20}(1-x)^{-5/2}, \\ f'''(x) &= \frac{105}{40}(1-x)^{-7/2}, \end{aligned}$$

gilt, haben wir $f(0) = \frac{7}{5}$, $f'(0) = \frac{7}{10}$ und $f''(0) = \frac{21}{20}$. Also gilt

$$T_2[f,0](x) = \frac{21}{40}x^2 + \frac{7}{10}x + \frac{7}{5}.$$

Mit der Restgliedabschätzung von Lagrange erhalten wir

$$R_3(1/50) = \frac{f'''(\xi)}{6}\left(\frac{1}{50}\right)^3$$

für ein $\xi \in]0, 1/50[$. Wir erhalten damit die Abschätzung

$$|\sqrt{2} - T_2[f,0](1/50)| = |R_3(1/50)| \leq \left|\frac{105}{40 \cdot 6 \cdot 50^3}(1-\xi)^{-7/2}\right|.$$

Nun ist die Funktion $x \mapsto (1-x)^{-7/2}$ auf dem Intervall $]0, 1/50[$ positiv und monoton wachsend, denn ihre Ableitung ist $x \mapsto 7/2 \cdot (1-x)^{-9/2}$ und diese Funktion ist auf dem Intervall $]0, 1/50[$ positiv. Also wird obige Abschätzung für $\xi = 1/50$ maximal und wir erhalten

$$\begin{aligned} |\sqrt{2} - T_2[f,0](1/50)| &\leq \frac{7}{16 \cdot 50^3}\left(\frac{50}{49}\right)^{7/2} = \frac{50^{7/2}}{16 \cdot 50^3 \cdot 7^6} = \frac{\sqrt{50}}{16 \cdot 7^6} \leq \frac{1}{2 \cdot 7^6} \\ &= \frac{1}{235298} = \frac{5}{1176490} \leq \frac{5}{1000000} = 5 \cdot 10^{-6} \leq 10^{-5}. \end{aligned}$$

Also ist

$$T_2[f,0](1/50) = \frac{21}{40} \cdot \frac{1}{50^2} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{50} + \frac{7}{5} = \frac{141421}{100000} = 1.41421$$

eine Näherung von $\sqrt{2}$ mit der geforderten Genauigkeit.

■

(T3.3) (Potenzreihen)

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r \in]0, \infty[$.

(i) Zeigen Sie, dass dann die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ den Konvergenzradius ∞ hat.

(ii) Wir setzen $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ für $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann für jedes $s \in]0, r[$ eine Konstante $M(s) > 0$ existiert mit

$$|f(z)| \leq M(s) \exp(|z|/s).$$

Lösung.

Behauptung: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ hat Konvergenzradius ∞ und für jedes $s \in]0, r[$ gibt es eine Konstante $M(s) > 0$ mit $|f(z)| \leq M(s) \exp(|z|/s)$.

Beweis: Es sei $s \in]0, r[$ gegeben. Dann gilt $1/r < 1/s$ und da die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ den Konvergenzradius r hat, muss $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/r < 1/s$ sein. Also gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/s$ für alle $n \geq N_0$ gilt. Für alle diese n haben wir damit auch $|a_n| < 1/s^n$.

Setzen wir $M(s) := \max\{1, |a_0|, s|a_1|, s^2|a_2|, \ldots, s^{N_0-1}|a_{N_0-1}|\}$, so gilt für alle $n \geq N_0$ mit dem oben erreichten

$$|a_n| = 1 \cdot |a_n| \leq M(s) \cdot |a_n| < M(s)\frac{1}{s^n}$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq N_0 - 1$ haben wir

$$|a_n| = |a_n| \cdot s^n \frac{1}{s^n} \leq M(s)\frac{1}{s^n}.$$

Zusammengenommen gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $|a_n| \leq M(s)/s^n$. Damit haben wir für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{|a_n||z|^n}{n!} \leq \frac{M(s)}{n!}\frac{|z|^n}{s^n}.$$

Da die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M(s)}{n!} \left(\frac{|z|}{s}\right)^n = M(s) \cdot \exp(|z|/s)$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert, ist damit nach dem Majorantenkriterium auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent, also ist der Konvergenzradius dieser Reihe ∞. Weiter erhalten wir für alle $z \in \mathbb{C}$

$$|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n!}|z|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M(s)}{n!} \left(\frac{|z|}{s}\right)^n = M(s) \exp(|z|/s),$$

was die gewünschte Abschätzung ist.

■