Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010

Analysis II
Tutorium 2

In diesem Tutorium betrachten wir Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ für ein festes Intervall $I := [a,b]$. Wir nennen eine solche Folge *gleichgeradig stetig,* wenn jedes f_n stetig ist und es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ gibt, so daß gilt

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x, y \in I \text{ mit } |x-y| < \delta\,.$$

(Der Unterschied zur gleichmäßigen Stetigkeit ist also, daß das δ nicht von n abhängen darf.)

Wir erinnern daran, daß eine Teilmenge $A \subseteq I$ eines Intervalls I *dicht* ist, wenn jedes offene Intervall (c,d) mit $(c,d) \cap I \neq \varnothing$ mindestens einen Punkt aus A enthält.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, daß eine Folge $(f_n)_n$ von stetigen Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ genau dann gleichmäßig konvergiert, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index N gibt mit

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ und } m, n \geq N\,.$$

Lösung. $(\Rightarrow)$ Angenommen $(f_n)_n$ konvergiert gleichmäßig gegen f und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es einen Index N mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } x \in D \text{ und } n \geq N\,.$$

Für $m, n \geq N$ folgt

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon\,.$$

$(\Leftarrow)$ Aus der Bedingung folgt sofort, daß für festes $x \in D$ die Folge $(f_n(x))_n$ eine Cauchy-Folge ist. Also konvergiert $(f_n)_n$ punktweise und

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existiert. Wir müssen zeigen, daß $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Sei dazu $\varepsilon > 0$. Nach Annahme, gibt es einen Index N mit

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } x \in D \text{ und } m, n \geq N\,.$$

Wir wollen zeigen, daß

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ und } n \geq N\,.$$

Sei dazu $x \in D$ und $n \geq N$. Da $(f_m(x))_m$ gegen $f(x)$ konvergiert, gibt es einen Index $m \geq N$ mit

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/2\,.$$

Wir erhalten

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Aufgabe 2

Sei $(f_n)_n$ eine gleichgeradig stetige Folge von Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$, $I = [a, b]$. Angenommen es gibt eine dichte Teilmenge $A \subseteq I$, so daß für alle $z \in A$ die Folge $(f_n(z))_n$ der Funktionswerte konvergiert. Zeigen Sie, daß die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig konvergiert.

Lösung. Wir verwenden das Kriterium aus Aufgabe 1. Sei $\varepsilon > 0$. Da $(f_n)_n$ gleichgeradig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/3 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x, y \in I \text{ mit } |x - y| < \delta\,.$$

Wir unterteilen das Intervall I in hinreichend viele Intervalle $I_1, \dots, I_k$, so daß die Länge jedes dieser Teilintervalle I_i kleiner als δ (aber größer als 0) ist. Da A dicht in I ist, gibt es zu jedem Teilintervall I_i einen Punkt $z_i \in I_i \cap A$. Nach Annahme konvergiert also die Folge $(f_n(z_i))_{n\in\mathbb{N}}$. Somit gibt es ein $M_i > 0$ mit

$$|f_n(z_i) - f_m(z_i)| < \varepsilon/3 \quad \text{für } m, n \geq M_i\,.$$

Wir behaupten, daß $N := M_1 + \dots + M_k$ der gewünschte Index ist. Sei $x \in I$ und $m, n \geq N$. Der Punkt x liegt in einem I_i und somit gilt $|x - z_i| < \delta$. Wir erhalten

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_m(z_i)| + |f_m(z_i) - f_n(z_i)| + |f_n(z_i) - f_n(x)| < \varepsilon\,.$$

Aufgabe 3

Sei $(f_n)_n$ eine gleichgeradig stetige Folge von Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$, $I = [a, b]$. Angenommen es gibt eine Konstante c mit

$$|f_n(x)| \leq c \quad \text{für alle } x \in I \text{ und } n \in \mathbb{N}\,.$$

Zeigen Sie, daß es eine Teilfolge $(f_{k_n})_n$ gibt, welche gleichmäßig konvergent ist.

Lösung. Die Menge $A := I \cap \mathbb{Q}$ ist abzählbar und dicht in I. (Falls I nur aus einem Punkt besteht, so setzen wir $A := I$.) Nach Aufgabe 2 reicht es, eine Teilfolge $(f_{k_n})_n$ zu finden, welche auf allen Punkten von A konvergiert.

Sei $z_0, z_1, z_2, \dots$ eine Aufzählung von A. Per Induktion nach $m \in \mathbb{N}$ konstruieren wir aufsteigende Zahlenfolgen

$$s_0^m < s_1^m < s_2^m < \dots\,,$$

so daß die Teilfolge $(f_{s_n^m}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in \{z_0, \dots, z_m\}$ konvergiert.

Für $m = 0$ betrachten wir die Folge $(f_n(z_0))_{n\in\mathbb{N}}$. Da sie beschränkt ist, enthält sie eine konvergente Teilfolge $(f_{k_n}(z_0))_{n\in\mathbb{N}}$. Wir setzen $s_n^0 := k_n$.

Für den Induktionschritt nehmen wir an, daß $(s_n^m)_{n\in\mathbb{N}}$ bereits definiert ist. Da die Folge $(f_{s_n^m}(z_{m+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(f_{s_{k_n}^m}(z_{m+1}))_n$. Wir setzen $s_n^{m+1} := s_{k_n}^m$.

Sei nun $k_n := s_n^n$. Wir behaupten, daß $(f_{k_n}(x))_n$ für alle $x \in A$ konvergiert. Sei etwa $x = z_m$. Es reicht zu zeigen, daß das Endstück $(f_{k_n}(z_m))_{n\geq m}$ konvergiert. Da aber für $n \geq m$ die Indizes $k_n = s_n^n$ eine Teilfolge von $(s_n^m)_n$ bilden, folgt aus der Konvergenz von $(f_{s_n^m}(z_m))_n$ auch die von $(f_{k_n}(z_m))_{n\geq m}$.