Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

21.04.2010

1. Tutorium Analysis II
Sommersemester 2010

Approximation durch Faltung: Dirac-Folgen und der Satz von Weierstraß

Wir wollen eine Funktion f durch Funktionen mit bestimmten Eigenschaften approximieren. Dazu führen wir ein allgemeines Verfahren ein, welches sogenannte *Dirac-Folgen* benutzt. Als Anwendung werden wir danach den Satz von Weierstraß beweisen. Dieser Satz besagt, dass jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf einen kompakten Intervall $[a, b]$ gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann.

Die Darstellung basiert auf den empfehlenswerten Büchern *Analysis* und *Math Talks for Undergraduates* von Serge Lang. Zunächst definieren wir die *Faltung* von zwei Funktionen.

(T1.1)

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, und sei I ein kompaktes Intervall so dass $f(x) = 0$ für alle $x \notin I$ oder $g(x) = 0$ für alle $x \notin I$. Wir definieren die *Faltung* $f * g$ von g mit f als

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Faltung kommutativ ist, d. h.

$$f * g = g * f.$$

(ii) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$(\alpha f) * g = f * (\alpha g) = \alpha(f * g).$$

(iii) Seien $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, so dass $f * g_1$, $f * g_2$ und $f * (g_1 + g_2)$ existieren. Zeigen Sie, dass

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2.$$

Lösung.

(i) Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir substituieren $u = x - t$ und erhalten

$$\int_0^R f(x-t)g(t)\,dt = -\int_x^{x-R} f(u)g(x-u)\,du = \int_{x-R}^{x} g(x-u)f(u)\,du$$

für alle $R > 0$, und somit

$$\int_0^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} g(x-u)f(u)\,du.$$

Ähnlich erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{0} f(x-t)g(t)\,dt = \int_{x}^{\infty} g(x-u)f(u)\,du,$$

und somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-u)f(u)\,du,$$

d. h. $(f * g)(x) = (g * f)(x)$.

(ii) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x-t)g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\alpha g(t)\,dt = \alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt,$$

d. h.

$$((\alpha f) * g)(x) = (f * (\alpha g))(x) = (\alpha(f * g))(x).$$

(iii) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)(g_1+g_2)(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g_1(t) + f(x-t)g_2(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g_1(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g_2(t)\,dt,\end{aligned}$$

d. h.

$$(f * (g_1 + g_2))(x) = (f * g_1)(x) + (f * g_2)(x).$$

■

Bemerkung: Später werden wir auch zeigen können, dass $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Wir betrachten die Faltung als eine Art Produkt, und es stellt sich die Frage, ob es eine Funktion $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $\delta * f = f$ für alle stetigen f gilt, die außerhalb eines kompakten Intervalls gleich Null sind. Wir werden das hier nicht beweisen, aber die Antwort auf diese Frage ist *nein*. Man kann aber etwas finden, was fast so gut wie ein neutrales Element δ ist, nämlich sogenannte *Dirac-Folgen*.

Unter einer *Dirac-Folge* verstehen wir eine Folge $(K_n)_{n\geq 1}$ von stetigen Funktionen $K_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die den folgenden Bedingungen genügen:

D1. Es gilt $K_n(x) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und $x \in \mathbb{R}$.

D2. Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t)\, dt = 1.$$

D3. Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $\delta > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}^*$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$\int_{|t|\geq\delta} K_n(t)\, dt < \varepsilon,$$

d. h.

$$\int_{-\infty}^{-\delta} K_n(t)\, dt + \int_{\delta}^{\infty} K_n(t)\, dt < \varepsilon.$$

Bedingung D2 bedeutet, dass die Fläche unter der Kurve $y = K_n(x)$ gleich 1 ist. Bedingung D3 bedeutet, dass die Fläche bei Null konzentriert ist, falls n hinreichend groß wird. Die Funktionen K_n haben also höhere Spitzen bei Null, wenn n groß wird, damit die Fläche unter der Kurve den Wert 1 erreicht. In den meisten Anwendungen sind die Funktionen K_n gerade, das heißt $K_n(x) = K_n(-x)$ für alle x, so dass die Graphen symmetrisch zur y-Achse sind. In unsere Anwendungen werden die K_n außerdem außerhalb eines kompaktes Intervalls gleich Null sein.

(T1.2)

Sei $(K_n)_{n\geq1}$ eine Dirac-Folge, und sei I ein kompaktes Intervall mit $K_n(x) = 0$ für alle $x \notin I$ und $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass $(K_n)_{n\geq1}$ die folgende bemerkenswerte Approximationseigenschaft besitzt:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte Funktion, und sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Dann konvergiert die Folge $(K_n * f)_{n\geq1}$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen f, d. h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}^*$ mit

$$\sup_{x\in[a,b]} |(K_n * f)(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Bemerkung: In gewissem Sinne "konvergiert" die Folge $(K_n)_{n\geq1}$ gegen ein neutrales Element für die Faltungsoperation, obwohl es keine Grenzwertfunktion gibt. Funktionen, mit denen man wie mit den K_n Faltungsintegrale bildet, heißen bisweilen *Kernfunktionen*. Durch Faltung mit diesen Kernfunktionen wird f in Funktionen $K_n * f$ transformiert, die f approximieren und im allgemeinen bessere Eigenschaften als f haben.

Lösung.

Es gilt

$$(K_n * f)(x) = (f * K_n)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)K_n(t)\, dt.$$

Andererseits folgt aus D2

$$f(x) = f(x)\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)K_n(t)\, dt,$$

daher

$$(K_n * f)(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x-t) - f(x)]K_n(t)\, dt. \tag{1}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen zunächst, dass es $\delta > 0$ gibt mit

$$|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $x \in [a, b]$ und $|t| < \delta$. Um das zu beweisen, müssen wir zuerst das Intervall etwas vergrößern: Aus der Kompaktheit von $[a-1, b+1]$ folgt die gleichmäßige Stetigkeit der stetigen Funktion f auf $[a-1, b+1]$, und es folgt, dass zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $1 > \delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $x \in [a-1, b+1]$ und $|t| < \delta$ mit $x - t \in [a-1, b+1]$, und daher für alle $x \in [a, b]$ und $|t| < \delta$.

Sei M eine Schranke von f und sei $x \in [a, b]$. Wir werden jetzt das Integral aus (1) abschätzen, indem wir es in zwei Teile zerlegen. Es gilt

$$|(K_n * f)(x) - f(x)| \;\leq\; \int_{|t|<\delta} |f(x-t) - f(x)|K_n(t)\, dt \;+\; \int_{|t|\geq\delta} |f(x-t) - f(x)|K_n(t)\, dt.$$

Für das erste Integral erhalten wir

$$\int_{|t|<\delta} |f(x-t) - f(x)|K_n(t)\, dt \;\leq\; \int_{|t|<\delta} \varepsilon K_n(t)\, dt \;\leq\; \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t)\, dt \;=\; \varepsilon,$$

und für das zweite Integral erhalten wir mit D3 einen $N \in \mathbb{N}^*$, so dass für $n \geq N$ gilt

$$\int_{|t|\geq\delta} |f(x-t) - f(x)|K_n(t)\, dt \;\leq\; 2M \int_{|t|\geq\delta} K_n(t)\, dt \;<\; 2M\varepsilon.$$

Daher gilt für $n \geq N$

$$|(K_n * f)(x) - f(x)| < \varepsilon + 2M\varepsilon,$$

und somit ist der Satz bewiesen.

■

(T1.3) (Der Satz von Weierstraß)

Wir wenden (T1.2) in einem speziellen Fall an.

Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann kann f auf $[a, b]$ gleichmäßig durch Polynome approximiert werden, d. h. es gibt eine Folge $(f_n)_{n\geq1}$ von Polynome, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}^*$ existiert mit

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass es genügt, den Satz für den Fall $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(1) = 0$ zu beweisen. Danach kann man die *Landau-Kerne* $K_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, benutzen, die durch

$$K_n(t) := \begin{cases} \dfrac{(1-t^2)^n}{c_n}, & \text{falls } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{falls } |t| > 1, \end{cases}$$

definiert sind, wobei

$$c_n := \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt.$$

Zeigen Sie, dass $(K_n)_{n\geq 1}$ eine Dirac-Folge ist, und benutzen Sie (T1.2). Zeigen Sie zuletzt, dass die $K_n * f$ auf $[0,1]$ mit Polynomen übereinstimmen.

Lösung.

Zunächst reduzieren wir den Beweis auf einen Fall, in dem wir (T1.2) mit speziellen K_n anwenden können. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $a < b$. Sei

$$u = \frac{x-a}{b-a}, \quad \text{wobei} \quad a \leq x \leq b.$$

Dann ist $x = (b-a)u + a$, wobei $0 \leq u \leq 1$ ist. Sei

$$g(u) = f((b-a)u + a).$$

Falls wir ein Polynom P auf $[0,1]$ finden, so dass

$$|P(u) - g(u)| < \varepsilon$$

für alle $u \in [0,1]$ ist, so gilt

$$\left| P\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - f(x) \right| < \varepsilon$$

für $a \leq x \leq b$, und $P((x-a)/(b-a))$ ist ein Polynom in x, womit der Satz gezeigt ist. Hiermit reduziert sich der Beweis auf den Fall $[a,b] = [0,1]$. Nehmen wir an, das sei der Fall und definieren

$$h(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)].$$

Können wir h durch Polynome approximieren, dann können wir natürlich auch f durch Polynome approximieren. Das reduziert unseren Beweis auf den Fall $f(0) = f(1) = 0$.

Von nun an setzen wir voraus, dass $[a,b] = [0,1]$ und $f(0) = f(1) = 0$ ist. Dann definieren wir $f(x) = 0$, falls x nicht im Intervall $[0,1]$ liegt. Damit ist f stetig und auf der ganzen reellen Achse beschränkt.

Wir betrachten nun die Landau-Kerne K_n. Wir stellen zunächst fest, dass K_n stetig ist und dass $K_n(t) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und $t \in \mathbb{R}$. Also ist D1 erfüllt. Weiter ist c_n so gewählt, dass D2 erfüllt ist. Wir behaupten, dass K_n auch die Bedingung D3 erfüllt und deshalb

eine Dirac-Folge ist. Um das zu zeigen müssen wir c_n abschätzen. Beachte, dass K_n gerade ist. Es gilt:

$$\frac{c_n}{2} = \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt = \int_0^1 (1+t)^n (1-t)^n \, dt \geq \int_0^1 (1-t)^n \, dt = \frac{1}{n+1}.$$

Also ist $c_n \geq 2/(n+1)$. Für $1 > \delta > 0$ folgt

$$\int_\delta^1 K_n(t) \, dt = \int_\delta^1 \frac{(1-t^2)^n}{c_n} \, dt \leq \int_\delta^1 \frac{n+1}{2} (1-\delta^2)^n \, dt \leq \frac{n+1}{2} (1-\delta^2)^n (1-\delta).$$

Sei $r = (1-\delta^2)$. Dann ist $0 < r < 1$ und $(n+1)r^n \to 0$, falls $n \to \infty$. Das beweist D3. (Das Integral über $[-1, -\delta]$ hat wegen der Symmetrie der K_n denselben Wert.)

Daher ist $(K_n)_{n\geq 1}$ eine Dirac-Folge. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass $K_n * f$ auf $[0,1]$ mit einem Polynom übereinstimmt, wobei

$$(K_n * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x-t) f(t) \, dt.$$

Nun ist f gleich Null außerhalb von $[0,1]$, also

$$(K_n * f)(x) = \int_0^1 K_n(x-t) f(t) \, dt.$$

Beachte, dass für $x \in [0,1]$ gilt $|x-t| \leq 1$ für alle $0 \leq t \leq 1$, also für alle t im Integrationsintervall. Und für $|x-t| \leq 1$ ist $K_n(x-t)$ ein Polynom in x und t und daher darstellbar als

$$K_n(x-t) = g_0(t) + g_1(t)x + \cdots + g_{2n}(t)x^{2n},$$

wobei $g_0, \ldots, g_{2n}$ Polynome in t sind. Daher gilt

$$(K_n * f)(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n} x^{2n},$$

wobei die Koeffizienten durch Integrale dargestellt werden:

$$a_i = \int_0^1 f(t) g_i(t) \, dt.$$

Damit ist der Satz von Weierstraß gezeigt.

■