Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010

Analysis II

Probeklausur

Schreiben Sie bitte auf jede Seite Ihren Namen und numerieren Sie die Seiten durch. Bitte falten Sie am Ende der Klausur das Deckblatt und legen die übrigen Blätter hinein.

Nachname: ....
Vorname: ....
Matr.-Nr.: ....

Hinweise

- Die Prüfungszeit beträgt **90 Minuten.**
- Es können maximal **57 Punkte** erreicht werden. Davon reichen **48 Punkte** für die Note 1 auf jeden Fall aus.
- Antworten sollten immer begründet und jeder Schritt in der Lösung hinreichend erklärt sein, es sei denn, es wird ausdrücklich darauf hingewiesen.
- **Viel Glück!**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ	Note
Punkte, maximal	9	12	12	12	12	57	
erreichte Punkte							

Aufgabe 1 9 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Bitte ankreuzen, falsche Antworten geben Punktabzug.)

(a) Sei $f_n : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von stetigen Funktionen, die punktweise gegen $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ konvergiert.

wahr	falsch	
□	□	Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig, so ist der Grenzwert f stetig.
□	□	Sind alle f_n gleichmäßig stetig, so konvergiert die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f.
□	□	Angenommen, alle f_n sind stetig differenzierbar und $(f_n)_n$ konvergiert gleichmäßig gegen f. Wenn für alle i die Folge $(D_i f_n)_n$ der partiellen Ableitungen gleichmäßig konvergiert, so ist f stetig differenzierbar.

(b)

wahr	falsch	
□	□	In einem metrischen Raum konvergiert jede Cauchy-Folge.
□	□	In einem kompakten metrischen Raum konvergiert jede Folge.
□	□	In einem kompakten metrischen Raum ist jede abgeschlossene Menge kompakt.
□	□	In einem kompakten metrischen Raum ist jede kompakte Menge abgeschlossen.
□	□	Jede Norm induziert eine Metrik.
□	□	Jede Metrik induziert eine Norm.

Lösung. (a)

wahr	falsch	
X	□	Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig, so ist der Grenzwert f stetig.
□	X	Sind alle f_n gleichmäßig stetig, so konvergiert die Folge $(f_n)_n$ gleichäßig gegen f.
X	□	Angenommen, alle f_n sind stetig differenzierbar und $(f_n)_n$ konvergiert gleichmäsig gegen f. Wenn für alle i die Folge $(D_i f_n)_n$ der partiellen Ableitungen gleichmäßig konvergiert, so ist f stetig differenzierbar.

(b)

wahr	falsch	
□	X	In einem metrischen Raum konvergiert jede Cauchy-Folge.
□	X	In einem kompakten metrischen Raum konvergiert jede Folge.
X	□	In einem kompakten metrischen Raum ist jede abgeschlossene Menge kompakt.
X	□	In einem kompakten metrischen Raum ist jede kompakte Menge abgeschlossen.
X	□	Jede Norm induziert eine Metrik.
□	X	Jede Metrik induziert eine Norm.

Aufgabe 2 12 Punkte

(a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig in Punkt $x_0 \in U$ und $g : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 mit $g(x_0) = 0$. Zeigen Sie, daß $\operatorname{grad}(fg)(x_0)$ existiert und daß $\operatorname{grad}(fg)(x_0) = f(x_0)\cdot\operatorname{grad} g(x_0)$.

(b) Bestimmen Sie, ob die Richtungsableitung $D_v f$ der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = x^2 + ze^x$ in Richtung $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ existiert und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(c) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $F(x,y) = e^{\sin(xy)} + x^2 - 2y - 1$. Zeigen Sie, daß es für hinreichend kleine x eine differenzierbare Funktion $\varphi(x)$ gibt mit $\varphi(x) = 0$ und $F(x,\varphi(x)) = 0$. Berechnen Sie $\varphi'(x)$.

Lösung. (a) Da g in x_0 differenzierbar ist, gibt es eine Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$, so daß

$$g(x) = g(x_0) + \langle x - x_0, \operatorname{grad} g(x_0)\rangle + \varphi(x) = 0 + \langle x - x_0, \operatorname{grad} g(x_0)\rangle + \varphi(x)$$

und

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{\|x - x_0\|} = 0\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= f(x)\langle x - x_0, \operatorname{grad} g(x_0)\rangle + f(x)\varphi(x) \\ &= [f(x_0) - f(x_0) + f(x)]\langle x - x_0, \operatorname{grad} g(x_0)\rangle + f(x)\varphi(x) \\ &= f(x_0)\langle x - x_0, \operatorname{grad} g(x_0)\rangle + [f(x) - f(x_0)]\langle x - x_0, \operatorname{grad} g(x_0)\rangle + f(x)\varphi(x) \\ &= \langle x - x_0, f(x_0)\operatorname{grad} g(x_0)\rangle + [f(x) - f(x_0)]\langle x - x_0, \operatorname{grad} g(x_0)\rangle + f(x)\varphi(x) \end{aligned}$$

Da f stetig in x_0 ist, gilt

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]\langle x - x_0, \operatorname{grad} g(x_0)\rangle + f(x)\varphi(x)}{\|x - x_0\|} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]\langle x - x_0, \operatorname{grad} g(x_0)\rangle}{\|x - x_0\|} + \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\varphi(x)}{\|x - x_0\|} \\ &= \lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)]\left\langle \tfrac{x - x_0}{\|x - x_0\|}, \operatorname{grad} g(x_0)\right\rangle + f(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{\|x - x_0\|} \\ &= 0 + 0\,. \end{aligned}$$

Also ist fg differenzierbar in x_0 mit $\operatorname{grad}(fg)(x_0) = f(x_0)\operatorname{grad} g(x_0)$.

(b) Da Polynome und die Exponentialfunktion differenzierbar sind und differenzierbare Funktionen unter Addition und Multiplikation abgeschlossen sind, ist f differenzierbar. Somit ist

$$D_v f = \langle v, \operatorname{grad} f \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} D_1 f + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} D_3 f = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x + ze^x) + \frac{1}{\sqrt{2}} e^x = \sqrt{2}x + \frac{z+1}{\sqrt{2}} e^x .$$

(c) Da F stetig differenzierbar ist, $F(0,0) = 0$ und

$$D_2 F(0,0) = e^{\sin(0)} \cos(0) \cdot 0 - 2 = -2 \neq 0 ,$$

folgt die Existenz von φ aus dem Satz über implizite Funktionen. Für die Ableitung benutzen wir die Kettenregel. Aus

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x, \varphi(x)) = D_1 F(x, \varphi(x)) + D_2 F(x, \varphi(x)) \varphi'(x) \\ &= e^{\sin(x\varphi(x))} \cos(x\varphi(x)) \varphi(x) + 2x + \left[e^{\sin(x\varphi(x))} \cos(x\varphi(x)) x - 2 \right] \varphi'(x) \end{aligned}$$

folgt

$$\varphi'(0) = -\frac{e^{\sin(0\varphi(0))} \cos(0\varphi(0)) \varphi(0) + 0}{e^{\sin(0\varphi(0))} \cos(0\varphi(0)) \cdot 0 - 2} = -\frac{0}{-2} = 0 .$$

Aufgabe 3 12 Punkte

(a) Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ unter der Nebenbedingung $x + y + z = 1$.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2$ Punkte mit $(\operatorname{grad} f)(x_i) = 0$ und $(\operatorname{Hess} f)(x_i) = H_i$, für die unten angegebenen Matrizen H_i. Kann man aus diesen Informationen schließen, ob f in x_i ein lokales Minimum, lokales Maximum, oder kein lokales Extremum besitzt?

$$H_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} .$$

Lösung. (a) Sei $g(x,y,z) = x + y + z - 1$. Es ist $\operatorname{grad} g = (1,1,1) \neq 0$. Die Gleichung

$$\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g$$

liefert

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda(1,1,1) .$$

Also ist $x = y = z = \lambda/2$. Einsetzen in $g(x,y,z) = 0$ liefert

$$x = y = z = 1/3 .$$

Dies ist der einzige Kandidat für ein Extremum. Wegen

$$f(x+t, x-t, x) = x^2 + 2xt + t^2 + x^2 - 2xt + t^2 + x^2 = 3x^2 + 2t^2 \geq f(x,x,x)$$

kann es sich nicht um ein Maximum handeln. Sei M die Menge, die durch die Bedingungen $g(x,y,z) = 0$ und $|x|, |y|, |z| \leq 2$ definiert ist. Da M kompakt ist, nimmt f auf M sein Minimum an. Dieses Minimum muß bei $(1/3, 1/3, 1/3)$ liegen, da $f(x,y,z) > 1/3 = f(1/3,1/3,1/3)$ für $|x| = 2$, $|y| = 2$ oder $|z| = 2$ gilt.

(b) H_1 ist positiv definit, da $1 > 0$ und $\det H_1 = 1 > 0$. Also hat f in x_1 ein lokales Minimum.

H_2 ist indefinit, da $3 > 0$ und $\det H_2 = -1 < 0$. Somit hat f in x_2 kein lokales Extremum.

H_3 ist negativ definit, da $-1 < 0$ und $\det H_3 = 4 > 0$. Also hat f in x_3 ein lokales Maximum.

(Siehe auch Satz 10.4.6 aus dem Lineare Algebra II Skript. Alternativ kann man über die Eigenwerte von H_i argumentieren.)

Aufgabe 4 12 Punkte

Bestimmen Sie diejenigen $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)^2}$$

existiert.

Lösung. Wir betrachten die Integrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)^2}$ und $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)^2}$ getrennt.

Für $x \in [0,1]$ ist

$$\frac{1}{4x^\alpha} \le \frac{1}{x^\alpha(1+x)^2} \le \frac{1}{x^\alpha}.$$

Somit existiert $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)^2}$ genau dann, wenn $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ existiert. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn $\alpha < 1$.

Für $x \ge 1$ ist

$$\frac{1}{4} \le \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \le 1.$$

Wegen

$$\frac{1}{x^\alpha(1+x)^2} = \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \frac{1}{x^{\alpha+2}}$$

folgt

$$\frac{1}{4x^{\alpha+2}} \le \frac{1}{x^\alpha(1+x)^2} \le \frac{1}{x^{\alpha+2}}.$$

Somit existiert $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)^2}$ genau dann, wenn $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+2}}$ existiert, also genau dann, wenn $\alpha + 2 > 1$.

Somit existiert $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)^2}$ genau dann, wenn $-1 < \alpha < 1$.

Aufgabe 5 12 Punkte

Welche der folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind Gradientenfelder? Bestimmen Sie entweder eine Funktion $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f_i = \operatorname{grad} \varphi_i$, oder finden Sie eine geschlossene Kurve γ_i mit $\int_{\gamma_i} f_i(x) \cdot \mathrm{d}x \neq 0$.

(a) $f_1(x,y) = (2xy - y^2,\ x^2 - 2xy)$

(b) $f_2(x,y) = (x, xy)$

(c) $f_3(x,y) = (e^{-y},\ -xe^{-y})$

Lösung. (a) Für $\xi = \binom{x}{y}$ sei $\gamma_\xi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ die Kurve mit $\gamma_\xi(t) = t\xi$. Es ist $f_1 = \operatorname{grad} \varphi_1$ mit

$$\begin{aligned}
\varphi(\xi) &= \int_{\gamma_\xi} f_1 \cdot \mathrm{d}x = \int_0^1 f_1 \gamma_\xi' \,\mathrm{d}t = \int_0^1 (2xyt^2 - y^2t^2,\ x^2t^2 - 2xyt^2) \binom{x}{y} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (2x^2y - xy^2 + x^2y - 2xy^2) t^2 \,\mathrm{d}t \\
&= x^2y - xy^2.
\end{aligned}$$

(b) f_2 ist kein Gradientenfeld, da $\frac{\partial(xy)}{\partial x} = y \neq 0 = \frac{\partial(x)}{\partial y}$. Sei γ die quadratische Kurve mit Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, die in dieser Reihenfolge durchlaufen werden. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma f_2(x) \cdot \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 f_2(t,0) \binom{1}{0} \,\mathrm{d}t + \int_0^1 f_2(1,t) \binom{0}{1} \,\mathrm{d}t + \int_0^1 f_2(1-t,1) \binom{-1}{0} \,\mathrm{d}t + \int_0^1 f_2(0,1-t) \binom{0}{-1} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t \,\mathrm{d}t + \int_0^1 t \,\mathrm{d}t + \int_0^1 -(1-t) \,\mathrm{d}t + \int_0^1 0 \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(c) Eine analoge Rechnung wie in (a) führt zu $f_3 = \operatorname{grad}(xe^{-y})$.