9 Differenziation

9.1 Differenzierbarkeit: Im Folgenden sei $f : I \to \mathbb{R}$ stets eine reelle Funktion, deren Definitionsgebiet $D_f = I$ ein offenes Intervall ist. Für zwei Stellen $x \neq x_0$ in I definieren wir den *Differenzenquotienten*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Er gibt die Steigung der Sekante an, die durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$ gegeben ist. Die Funktion f heißt *differenzierbar an der Stelle* $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

- Der Grenzwert heißt *Ableitung* von f an der Stelle x_0 und man schreibt dafür

  $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

  Andere gebräuchliche Bezeichnungen sind

  $$f'(x_0) = Df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

- Setzt man $h := x - x_0$, dann erhält man die äquivalente Darstellung

  $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Die Funktion f heißt *differenzierbar*, wenn sie an allen Stellen $x_0 \in I$ differenzierbar ist. Die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$, die jedem Punkt $x_0 \in I$ den Wert der Ableitung zuweist, heißt *Ableitungsfunktion*.

9.2 Beispiel:

- Für die lineare Funktion $f(x) = ax + b$ ist

  $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} = a.$$

  Also ist f differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = a$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Für die quadratische Funktion $f(x) = x^2$ ist

  $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0.$$

  Der Grenzwert für x gegen x_0 ist

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0.$$

  Also ist f differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = 2x_0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Für die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ und $x_0 = 0$ ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

  Es existiert also kein Grenzwert für $x \to 0$ und die Betragsfunktion ist deshalb nicht differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$.

9.3 Wichtige Ableitungen:

f	f'	
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
x^n	nx^{n-1}	$x \neq 0$, $-n \in \mathbb{N}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$1/x$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\arctan x$	$1/(1+x^2)$	$x \in \mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{artanh} x$	$1/(1-x^2)$	$x \in (-1, 1)$

9.4 Regeln: Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen, dann gilt

- *Linearität:* Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $af + bg$ differenzierbar,

$$(af + bg)' = af' + bg'.$$

- *Produktregel:* Die Funktion $f \cdot g$ ist differenzierbar,

$$(f \cdot g)' = fg' + f'g.$$

- *Quotientenregel:* Die Funktion f/g ist differenzierbar, sofern $g \neq 0$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

- *Kettenregel:* Die Funktion $f \circ g$ ist differenzierbar,

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

- *Umkehrfunktion:* Wenn $f' \neq 0$, dann ist f streng monoton [$\to$ 9.8] und damit injektiv. Es existiert also die Umkehrfunktion [$\to$ 8.10] $g := f^{-1}$, und es gilt

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \text{wobei} \quad f(x) = y, \quad g(y) = x.$$

9.5 Beispiel:

- Linearität:
$$(3\sin x - 2x^3)' = 3\cos x - 6x^2$$
- Produktregel:
$$(x^2 \ln x)' = 2x\ln x + x, \quad x > 0$$
- Quotientenregel:
$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2)$$
- Kettenregel:
$$(\exp(x^2))' = \exp(x^2)\cdot(2x)$$
$$(\arctan(1/x))' = \frac{-1/x^2}{1+(1/x)^2} = \frac{-1}{1+x^2}, \quad x \neq 0$$
- Umkehrfunktion:
$$y = f(x) = \tan x, \quad f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$$
$$x = g(y) = \arctan y, \quad g'(y) = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

9.6 Tangente: Sei f an der Stelle x_0 differenzierbar. Die Funktion
$$t(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
bzw.
$$t(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h$$
beschreibt eine Gerade, die man als *Tangente* von f an der Stelle x_0 bezeichnet. Sei $r(h) := f(x_0+h) - t(x_0+h)$ die Abweichung zwischen Funktion und Tangente, dann gilt
$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + r(h), \quad \lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h} = 0.$$
Ersetzt man die Ableitung $f'(x_0)$ durch eine beliebige andere reelle Zahl, so ist der Grenzwert des Quotienten $r(h)/h$ von Null verschieden. In diesem Sinne liefert die Ableitung $f'(x_0)$ die beste lineare Approximation der Funktion f in der Nähe des Punktes x_0.

9.7 Mittelwertsatz: Sei f differenzierbar auf dem Intervall I, dann gibt eine Zahl $\vartheta \in (0,1)$, sodass
$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \vartheta h),$$
sofern x_0, $x_0 + h \in I$. Setzt man $a = x_0$, $b = x_0 + h$ und $\xi = x_0 + \vartheta h$ für $h > 0$, dann erhält man
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi), \quad \xi \in (a,b).$$
Es gibt also an einer Zwischenstelle ξ eine Tangente, die parallel zur Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.

9.8 Folgerungen: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

- Wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$, dann gilt
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot 0 = f(x_0)$$
für alle h. Die Funktion f ist also konstant.

- Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, dann gilt
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \vartheta h) > f(x_0)$$
für alle $h > 0$. Die Funktion f ist also streng monoton wachsend. Genauso ist f streng monoton fallend, wenn $f'(x) < 0$.

- Für die Aweichung r zwischen Funktion und Tangente [$\to$ 9.6] gilt
$$r(h) = h\big(f'(x_0 + \vartheta h) - f'(x_0)\big).$$

9.9 Beispiel: Sei $f(x) = \sin x$. Mit $f'(x) = \cos x$ erhält man im Punkt $x_0 = 0$ die Tangente
$$t(h) = h \quad \text{und damit} \quad r(h) = \sin h - h = h\big(\cos(\vartheta h) - 1\big).$$
Für $|h| \leq 1/10$ gilt dann die Abschätzung
$$|\sin h - h| \leq |h| \cdot (1 - \cos h) \leq |h| \cdot (1 - \cos \tfrac{1}{10}) < \frac{|h|}{200}.$$

9.10 Regel von l'Hospital: Wenn f und g stetige Funktionen sind, dann gilt
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}, \quad \text{falls} \quad g(x_0) \neq 0.$$
Im Fall $f(x_0) \neq 0$, $g(x_0) = 0$ existiert kein Grenzwert. Wenn aber f und g an der Stelle x_0 differenzierbar sind, dann erhält man für $f(x_0) = g(x_0) = 0$ gemäß 9.6 mit $x = x_0 + h$
$$\begin{aligned} f(x) &= hf'(x_0) + r_1(h) \\ g(x) &= hg'(x_0) + r_2(h) \end{aligned}$$
und damit
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0) + r_1(h)/h}{g'(x_0) + r_2(h)/h} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}, \quad \text{falls} \quad g'(x_0) \neq 0.$$
Allgemeiner gilt: Wenn f und g differenzierbare Funktionen sind und
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$
oder
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty,$$
dann ist
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
Diese Regeln gelten auch vollkommen analog für Grenzwerte der Form $x \to \infty$.

9.11 Beispiel:

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$
- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$
- $$\lim_{x\downarrow 0} x \ln x = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\downarrow 0}(-x) = 0$$
- $$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x + 1}{\cos(2-2x) - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x - 1}{2\sin(2-2x)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1/x^2}{-4\cos(2-2x)} = \frac{1}{4}$$

9.12 Stetige Differenzierbarkeit: Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *stetig differenzierbar*, wenn sie differenzierbar ist und die Ableitungsfunktion f' zudem stetig ist.

9.13 Beispiel:

- Die Funktion $f(x) = \sqrt{|x|^3}$, $x \in \mathbb{R}$, ist stetig differenzierbar, denn die Ableitungsfunktion
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$
ist stetig.
- Die Funktion
$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$
ist differenzierbar mit
$$g'(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$
Sie ist aber nicht stetig differenzierbar, da der Grenzwert $\lim_{x\to 0} g'(x)$ nicht existiert.

  Das hier zu beobachtende Verhalten ist typisch. Ableitungsfunktionen differenzierbarer Funktionen weisen niemals Sprungstellen auf. Unstetigkeiten sind vielmehr stets durch ein oszillierendes Verhalten der Ableitungsfunktionen bedingt, das zu einer Nichtexistienz von Grenzwerten führt.

9.14 Höhere Ableitungen: Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *k-mal differenzierbar*, wenn die Ableitungen in der Rekursion

$$\begin{aligned} f^{(0)} &:= f \\ f^{(n)} &:= \left(f^{(n-1)}\right)' \end{aligned}$$

für alle $n = 1, \dots, k$ existieren. Die Funktion f heißt *unendlich oft differenzierbar*, wenn diese Ableitungen für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren. Man nennt $f^{(k)}$ die k-te Ableitung von f und schreibt auch

$$f' = f^{(1)}, \quad f'' = f^{(2)}, \quad f''' = f^{(3)}$$

für Ableitungen niedriger Ordnung. Andere gebräuchliche Schreibweisen sind

$$f^{(k)} = D^k f = \frac{d^k f}{dx^k}.$$

Die Funktion f heißt *k-mal stetig differenzierbar*, wenn die Funktion $f^{(k)}$ stetig ist. Die Menge aller dieser Funktionen wird mit $C^k(I)$ bezeichnet. Insbesondere ist $C^0(I)$ die Menge der stetigen Funktionen auf dem Intervall I. Die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen wird mit $C^\infty(I)$ bezeichnet.

9.15 Beispiel [→ 9.13]:

- Polynome und alle elementaren Funktionen $(\exp, \sin, \cos, \ln)$ sind auf ihrem Definitionsgebiet unendlich oft differenzierbar. Es gilt z.B.

$$\begin{aligned} f(x) = x^n \quad &\Rightarrow \quad f^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k} & \text{für } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{für } k > n \end{cases} \\ f(x) = e^{2x} \quad &\Rightarrow \quad f^{(k)}(x) = 2^k e^{2x} \\ f(x) = \sin x \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x \end{aligned}$$

- Für die *Stutzfunktion*

$$H_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{für } x \ge 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

  vom Grad n gilt $H_n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$. Insbesondere erhält man für $n = 0$ die Heaviside-Funktion [→ 8.15]. Diese ist unstetig und man schreibt $H_0 \in C^{-1}(\mathbb{R})$.

- Die Funktion f gemäß Beispiel 9.13 ist stetig differenzierbar, aber nicht zweimal differenzierbar, $f \in C^1(\mathbb{R})$.

- Die Funktion g gemäß Beispiel 9.13 ist stetig, aber nicht stetig differenzierbar, $g \in C^0(\mathbb{R})$.