8 Reelle Funktionen

8.1 Reelle Funktion: Eine *reelle Funktion* $f : D_f \to \mathbb{R}$ ordnet jedem Element $x \in D_f$ der Menge $D_f \subset \mathbb{R}$ eine reelle Zahl $y \in \mathbb{R}$ zu, und man schreibt

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

- Die Menge D_f heißt *Definitionsbereich* von f.
- x heißt *Urbild von* y, und y heißt *Bild von* x.
- Die *Bildmenge* von f ist die Menge aller Bilder,

$$B_f := \{y = f(x) : x \in D_f\}.$$

8.2 Eigenschaften: Die Funktion f heißt

- *injektiv*, wenn $f(x_1) \neq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D_f$ mit $x_1 \neq x_2$.
- *monoton wachsend/fallend*, wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$ bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D_f$ mit $x_1 < x_2$.
- *streng monoton wachsend/fallend*, wenn $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D_f$ mit $x_1 < x_2$.
- *beschränkt*, wenn es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|f(x)| \leq c$ für alle $x \in D_f$.
- *gerade/ungerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ bzw. $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in D_f$.

8.3 Beispiel: Sei $f(x) := 1/(1 + x^2)$, $x \in D_f$.

- Für $D_f = \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist f injektiv und $B_f = (0, 1]$.
- Für $D_f = [-1, 2)$ ist f nicht injektiv und $B_f = (1/5, 1]$.

8.4 Beispiel: Sei $f(x) := x + |x|$, $x \in D_f$.

- Für $D_f = \mathbb{R}$ ist f monoton wachsend und unbeschränkt.
- Für $D_f = [0, 3]$ ist f streng monoton wachsend und beschränkt.

8.5 Beispiel:

- Das Monom x^n ist eine gerade Funktion, wenn n gerade ist und eine ungerade Funktion, wenn n ungerade ist.
- Die Funktionen $\cos x$ und
$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
sind gerade.
- Die Funktionen $\sin x$ und
$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
sind ungerade.

8.6 Regeln:

- Aus strenger Monotonie folgt Injektivität.
- Summe und Produkt zweier gerader Funktionen sind gerade.
- Die Summe zweier ungerader Funktionen ist ungerade, aber ihr Produkt ist gerade.

8.7 Verkettung: Seien $f := D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ zwei reelle Funktionen. Wenn $B_g \subset D_f$, dann ist die verkettete Funktion $h := f \circ g : D_g \to \mathbb{R}$ (lies „*f nach g*“) definiert durch

$$h(x) := f(g(x)), \quad x \in D_g.$$

8.8 Beispiel: Sei $f(x) := \ln(1-x)$, $D_f := (-\infty, 1)$ und $g(x) := \cos x$.

- Für $D_g = \mathbb{R}$ ist $B_g = [-1, 1] \not\subset D_f$. Die Verkettung $f \circ g$ ist also nicht definiert.
- Für $D_g = (0, 6)$ ist $B_g = [-1, 1) \subset D_f$ und damit

$$h(x) = f(g(x)) = \ln(1 - \cos x), \quad x \in (0, 6).$$

8.9 Regeln:

- Die Verkettung zweier monoton wachsender Funktionen ist monoton wachsend.
- Die Verkettung zweier monoton fallender Funktionen ist monoton wachsend.
- Die Verkettung zweier injektiver Funktionen ist injektiv.
- Die Verkettung zweier gerader Funktionen ist gerade.
- Die Verkettung zweier ungerader Funktionen ist ungerade.

8.10 Umkehrfunktion: Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ injektiv, dann gibt es zu jedem Bild $y \in B_f$ ein eindeutig bestimmtes Urbild x. Die Funktion, die jedem Bild das zugehörige Urbild zuordnet, wird *Umkehrfunktion* genannt und mit f^{-1} bezeichnet,

$$f^{-1} : B_f \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = x \text{ für dasjenige } x \in D_f \text{ mit } f(x) = y.$$

Es gilt

- $D_{f^{-1}} = B_f$ und $B_{f^{-1}} = D_f$.
- $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in D_f$.
- $f(f^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in B_f$.
- $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
- Das Schaubild von f^{-1} erhält man aus dem Schaubild von f durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden.

8.11 Beispiel:

- Die Funktion $f(x) = \sin(x)$, $D_f = [-\pi/2, \pi/2]$ ist injektiv und es gilt $B_f = [-1, 1]$. Die Umkehrfunktion f^{-1} hat also das Definitionsgebiet $D_{f^{-1}} = B_f = [-1, 1]$ und die Bildmenge $B_{f^{-1}} = D_f = [-\pi/2, \pi/2]$. Die so definierte Umkehrfunktion wird als *Arcussinus* bezeichent und man schreibt dafür

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2].$$

  Der Arcussinus ordnet also jeder Zahl zwischen -1 und 1 einen Winkel aus dem Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ zu, dessen Sinus dem gegebenen Argument entspricht. Es gilt beispielsweise

$$\arcsin(0) = 0, \quad \arcsin(1/2) = \pi/6, \quad \arcsin(-1) = -\pi/2,$$

  denn

$$\sin(0) = 0, \quad \sin(\pi/6) = 1/2, \quad \sin(-\pi/2) = -1.$$

- Die Funktion $f(x) = \cos(x)$, $D_f = [0, \pi]$ ist injektiv und es gilt $B_f = [-1, 1]$. Die Umkehrfunktion f^{-1} hat also das Definitionsgebiet $D_{f^{-1}} = B_f = [-1, 1]$ und die Bildmenge $B_{f^{-1}} = D_f = [0, \pi]$. Die so definierte Umkehrfunktion wird als *Arcuscosinus* bezeichent und man schreibt dafür

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

  Es gilt beispielsweise

$$\arccos(1) = 0, \quad \arccos(1/2) = \pi/3, \quad \arccos(-1) = \pi,$$

  denn

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi/3) = 1/2, \quad \cos(\pi) = -1.$$

- Die Funktion $f(x) = \tan(x)$, $D_f = (-\pi/2, \pi/2)$ ist injektiv und es gilt $B_f = \mathbb{R}$. Die Umkehrfunktion f^{-1} hat also das Definitionsgebiet $D_{f^{-1}} = B_f = \mathbb{R}$ und die Bildmenge $B_{f^{-1}} = D_f = (-\pi/2, \pi/2)$. Die so definierte Umkehrfunktion wird als *Arcustangens* bezeichent und man schreibt dafür

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2).$$

  Es gilt beispielsweise

$$\arctan(0) = 0, \quad \arctan(1) = \pi/4, \quad \arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/3,$$

  denn

$$\tan(0) = 0, \quad \tan(\pi/4) = 1, \quad \tan(-\pi/3) = -\sqrt{3}.$$

- Die Funktion $f(x) = e^x$, $D_f = \mathbb{R}$ ist injektiv und es gilt $B_f = \mathbb{R}_{>0}$. Die Umkehrfunktion f^{-1} hat also das Definitionsgebiet $D_{f^{-1}} = B_f = \mathbb{R}_{>0}$ und die Bildmenge $B_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}$. Die so definierte Umkehrfunktion wird als *natürlicher Logarithmus* bezeichent und man schreibt dafür

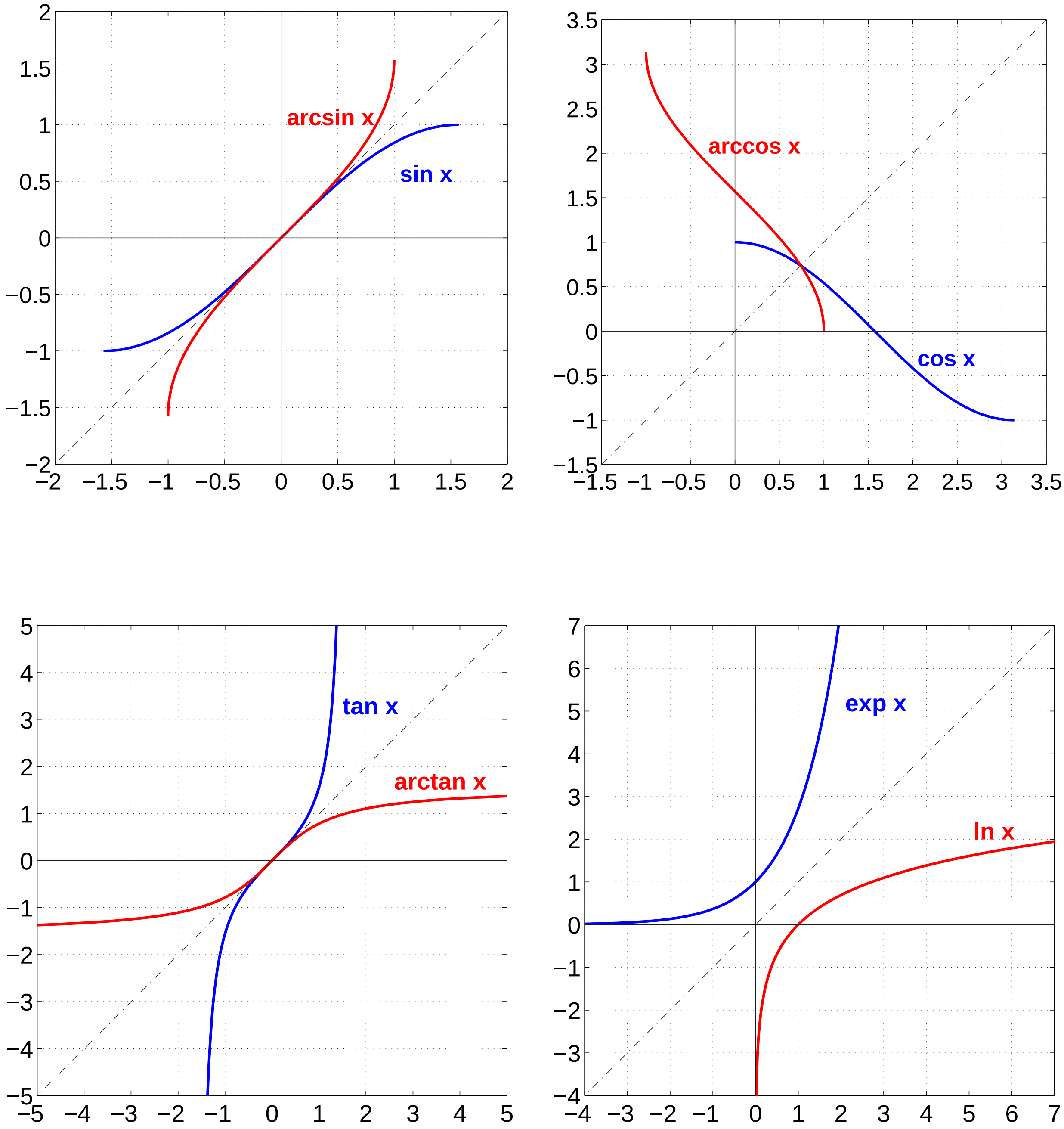
  $$\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}.$$

  Es gilt beispielsweise

  $$\ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1, \quad \ln(1/e^2) = -2,$$

  denn

  $$e^0 = 1, \quad e^1 = e, \quad e^{-2} = 1/e^2.$$



8.12 Häufungspunkt: $x_* \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* der Menge $D_f \subset \mathbb{R}$, wenn es eine Folge $(x_n)_n$ gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_*, \quad x_n \in D_f \;, \quad x_n \neq x_*, \quad \text{f.ü..}$$

8.13 Beispiel:

- $x_* = 1$ ist ein Häufungspunkt der Menge $(0, 1)$.
- $x_* = 1$ ist kein Häufungspunkt der Menge $\mathbb{N}$.
- $x_* = \pi$ ist ein Häufungspunkt der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

8.14 Grenzwert: Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ eine reele Funktion. Man sagt, dass f an der Stelle x_* den *Grenzwert* f_* hat, wenn x_* ein Häugungspunkt von D_f ist und wenn für jede gegen x_* konvergente Folge $(x_n)_n$ gemäß 8.12 gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f_*.$$

Man schreibt dann

$$\lim_{x\to x_*} f(x) = f_*.$$

Wenn die Folge $(f(x_n))_n$ stets bestimmt divergent ist, dann schreibt man

$$\lim_{x\to x_*} f(x) = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to x_*} f(x) = -\infty.$$

Wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f_*$ für jede bestimmt divergente Folge $(x_n)_n$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, dann schreibt man

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f_*.$$

Analog sind die Ausdrücke

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = f_*, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$$

erklärt.

8.15 Beispiel:

- $$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \pi/2, \quad \lim_{x\to 0} \ln|x| = -\infty.$$
- Die Funktion $f(x) = \sin(1/x), x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, hat an der Stelle $x_* = 0$ keinen Grenzwert.
- Die Funktion $f(x) = x, x \in \mathbb{N}$, hat an der Stelle $x_* = 1$ keinen Grenzwert, da $x_* = 1$ kein Häufungspunkt von $\mathbb{N}$ ist [$\to$ 8.13].
- Die *Heaviside-Funktion* $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

  $$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

  Sie hat an der Stelle $x_* = 0$ keinen Grenzwert. Sei $f(x) := H(x) + H(-x)$, dann gilt

  $$\lim_{x\to 0} f(x) = 1,$$

  aber $f(0) = 2$.

8.16 Einseitiger Grenzwert: Man sagt, dass f an der Stelle x_* den *rechtsseitigen bzw. linksseitigen Grenzwert* f_* hat, wenn x_* ein Häugungspunkt von D_f ist und wenn für jede Folge $(x_n)_n$ gemäß 8.12 mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$x_n > x_* \quad \text{bzw.} \quad x_n < x_*, \quad n \in \mathbb{N},$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f_*.$$

Man schreibt dann

$$\lim_{x\downarrow x_*} f(x) = f_* \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\uparrow x_*} f(x) = f_*.$$

8.17 Beispiel: Für die Heaviside-Funktion [→ 8.15] gilt

$$\lim_{x\uparrow 0} H(x) = 0, \quad \lim_{x\downarrow 0} H(x) = 1.$$

8.18 Stetigkeit: Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt *stetig an der Stelle* $x_* \in D_f$, wenn

$$\lim_{x\to x_*} f(x) = f(x_*).$$

f heißt *stetig*, wenn f an allen Stellen $x \in D_f$ stetig ist.

8.19 Regeln:

- Alle elementaren Funktionen (Polynome, exp, sin, cos, tan und deren Umkehrfunktionen) sowie Betrag-, Potenz- und Wurzelfunktionen sind stetig auf ihrem gesamten Definitionsgebiet.
- Summe, Differenz, Produkt, Quotient und Verkettung stetiger Funktionen sind stetig auf ihrem gesamten Definitionsgebiet.
- Die Umkehrfunktion einer stetigen Funktion ist stetig, sofern das Definitionsgebiet ein Intervall ist.
- *Zwischenwertsatz:* Sei $f := [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist B_f ein Intervall. Das heißt insbesondere, dass die Funktion alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt.
- *Satz von Weierstraß:* Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es Stellen $\underline{x}, \overline{x} \in [a, b]$ mit

  $$f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\overline{x}), \quad x \in [a, b].$$

  Eine derartige Aussage gilt in der Regel nicht, wenn das Definitionsgebiet kein abgeschlossenes Intervall ist.

8.20 Bemerkungen:

- f ist stetig an der Stelle x_* genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ es ein $\delta > 0$ gibt, sodass

  $$|f(x) - f(x_*)| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad |x - x_*| < \delta.$$

- Bei einer stetigen Funktion bewirken kleine Änderungen des Arguments kleine Änderungen des Funktionswerts.
- Das Schaubild einer stetigen Funktion besitzt keine Sprünge, sofern das Definitionsgebiet ein Intervall ist.

Nur die erste Aussage ist streng mathematischer Natur. Die beiden anderen sind unpräzise, aber gelegentlich hilfreich.