7 Reihen

7.1 Reihe: Sei $(a_n)_n$ eine Folge. Dann definiert man die zugehörige Folge $(s_m)_m$ gemäß

$$\begin{aligned} s_1 &:= a_1 \\ s_2 &:= a_1 + a_2 \\ s_3 &:= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_m &:= a_1 + a_2 + \cdots + a_m = \sum_{n=1}^{m} a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Man bezeichnet die Folge $(s_m)_m$ als die *Reihe* und die Folgenglieder s_m als die *Partialsummen* zur Folge $(a_n)_n$. Wenn die Reihe, also die Folge der Partialsummen, konvergiert, dann schreibt man für den Grenzwert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{m\to\infty} s_m.$$

Vollkommen analog definiert man zur Folge $(a_n)_{n\geq k}$ die die Reihe $(s_m)_{m\geq k}$ durch die Partialsummen

$$s_m := a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m = \sum_{n=k}^{m} a_n, \quad m \geq k,$$

und schreibt im Falle der Konvergenz

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n := \lim_{m\to\infty} s_m.$$

Gemäß den Regeln für Grenzwerte von Folgen gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

sofern die Reihen zu den Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergieren.

7.2 Beispiel: Für ein gegebenes $q \neq 1$ sei die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ gegeben durch $a_n := q^n$. Die zugehörige Folge der Partialsummen

$$s_0 = 1,\ s_1 = 1 + q,\ s_2 = 1 + q + q^2, \ldots$$

wird als *geometrische Reihe* bezeichnet. In diesem Fall lassen sich die Partialsummen explizit angeben,

$$s_m = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}.$$

Die geometrische Reihe konvergiert also genau dann mit Grenzwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q},$$

wenn $|q| < 1$. Anderenfalls ist die geometrische Reihe divergent.

7.3 Notwendige Bedingung: Sei $\sum_{n=1}^\infty a_n$ eine konvergente Reihe mit Grenzwert s. Dann gilt

$$a_n = s_n - s_{n-1} = (s_n - s) - (s_{n-1} - s).$$

Beide Klammern auf der rechten Seite sind Nullfolgen, also muss auch $(a_n)_n$ eine Nullfolge sein [$\to$ 6.6]. Für die Konvergenz einer Reihe ist es also notwendig, dass $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist. Diese Bedingung ist aber keineswegs hinreichend, d.h., selbst wenn $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist, kann die zugehörige Reihe divergent sein.

7.4 Beispiel:

- Sei $a_n := 1/n$. Die zugehörige Folge der Partialsummen

  $$s_1 = 1,\; s_2 = 1 + 1/2,\; s_3 = 1 + 1/2 + 1/3, \ldots$$

  wird als *harmonische Reihe* bezeichnet. Diese ist bestimmt divergent,

  $$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty.$$

- Die Reihe zur Folge $a_n = 1/n^\alpha$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$. Es ist z.B.

  $$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

7.5 Leibniz-Kriterium: Sei $(a_n)_n$ eine alternierende Nullfolge [$\to$ 6.2] mit der Eigenschaft, dass die Folge der Beträge $(|a_n|)_n$ monoton fällt, dann konvergiert die zugehörige Reihe.

7.6 Beispiel: Sei $a_n := (-1)^{n+1}/n$. Die zugehörige Folge der Partialsummen

$$s_1 = 1,\; s_2 = 1 - 1/2,\; s_3 = 1 - 1/2 + 1/3, \ldots$$

wird als *alternierende harmonische Reihe* bezeichnet. Sie konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium und hat den Grenzwert

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

7.7 Sprachgebrauch: In der Praxis wird das Symbol $\sum_{n=1}^\infty a_n$, das eigentlich nur für den Grenzwert einer Reihe steht, häufig auch für die Reihe selbst verwendet. Man sagt also:

Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ ...

und meint damit eigentlich

Die Reihe zur Folge $(a_n)_n$ ...

Außerdem wird der Grenzwert einer Reihe gelegentlich auch nur als *Wert* der Reihe bezeichnet. Der Satz

Die Reihe $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n/(2n+1)$ *hat den Wert* $\pi/4$.

ist also zu interpretieren als

Die zur Folge $(a_n)_{n\geq 0}, a_n = (-1)^n/(2n+1)$ *gehörende Reihe hat den Grenzwert* $\pi/4$.

7.8 Vergleichskriterien: Gegeben seien die Folgen $(a_n)_n$, $(b_n)_n$.

- *Konvergente Majorante:* Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} \quad \text{existiert}$$
oder
$$|b_n| \le a_n \quad \text{f.ü.},$$
dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

- *Divergente Minorante:* Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert und
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \quad \text{existiert}$$
oder
$$0 \le a_n \le b_n \quad \text{f.ü.},$$
dann divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

7.9 Absolute Konvergenz: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Eine absolut konvergente Reihe ist nach dem Majorantenkriterium konvergent. Eine Reihe, die konvergent, aber nicht absoulut konvergent ist, heißt *bedingt konvergent*. Bei absoult konvergenten Reihen können die Folgenglieder a_n beliebig umgeordnet werden, ohne dass sich der Wert der Reihe ändert. Hier gilt also in einem gewissen Sinne das Kommutativgesetz. Bei bedingt konvergenten Reihen bewirkt eine Umordnung der Folgenglieder a_n hingegen in der Regel eine Änderung des Reihenwertes oder sogar einen Verlust der Konvergenz.

7.10 Beispiel:

- [→ 7.4] Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n^2$ ist absolut konvergent.
- [→ 7.6] Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ ist bedingt konvergent.

7.11 Quotientenkriterium: Sei
$$q_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{und, falls konvergent,} \quad q := \lim_{n\to\infty} q_n.$$
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent, wenn $q < 1$ und divergent, wenn $q > 1$. Im Fall $q = 1$ ist keine Entscheidung möglich.

7.12 Wurzelkriterium: Sei
$$w_n := \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{und, falls konvergent,} \quad w := \lim_{n\to\infty} w_n.$$
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent, wenn $w < 1$ und divergent, wenn $w > 1$. Im Fall $w = 1$ ist keine Entscheidung möglich. Das Wurzelkriterium ist im folgenden Sinne stärker als das Qotientenkriterium: Wenn $\lim_{n\to\infty} q_n$ existiert, dann existiert auch $\lim_{n\to\infty} w_n$ und es gilt
$$q = \lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} w_n = w.$$

7.13 Beispiel: Sei $a_n = (-1)^n\, n^3\, 2^{-n}$. Das Quotientenkriterium liefert

$$q_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^3\, 2^{-n-1}}{n^3\, 2^{-n}} = \frac{(1+1/n)^3}{2}, \quad q = \lim_{n\to\infty} q_n = \frac{1}{2}.$$

Genauso liefert das Wurzelkriterium

$$w_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n^3}}{2}, \quad w = \lim_{n\to\infty} w_n = \frac{1}{2}.$$

Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n^3}{2^n}$$

ist also absolut konvergent.

7.14 Beispiel: Sei

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 2^{-n+2} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Es ist also

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \cdots .$$

Das Quotientenkriterium liefert die divergente Folge

$$q_n = \begin{cases} 2 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 1/8 & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

während das Wurzelkriterium mit

$$w_n = \begin{cases} 1/2 & \text{für } n \text{ gerade} \\ \sqrt[n]{4}/2 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad w = \lim_{n\to\infty} w_n = 1/2$$

zeigt, dass die Reihe absolut konvergent ist.

7.15 Beispiel: Für $a_n = n^n/n!$ ist

$$q_n = \frac{(n+1)^{n+1}\, n!}{n^n\,(n+1)!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad w_n = n/\sqrt[n]{n!}.$$

Zum einen folgt aus $\lim_{n\to\infty} q_n = e$ die Divergenz der zugehörigen Reihe. Zum anderen liefert die Gleichheit der Grenzwerte $w = q$ die *Stirlingsche Formel* [$\to$ 6.10]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

7.16 Beispiel: Für $a_n = x^n/n!$ ist

$$q_n = \left|\frac{x^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1}, \quad q = \lim_{n\to\infty} q_n = 0.$$

Die zugehörige Reihe ist also für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent und definiert die e-Funktion,

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$