6 Folgen

6.1 Folge: Eine Abbildung

$$n \mapsto a_n,$$

die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zuweist, heißt *reelle Zahlenfolge* oder auch kurz *Folge*. Man schreibt dafür $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder auch kurz $(a_n)_n$. Man bezeichnet den Wert a_n als n-tes *Folgenglied* und n als den zugehörigen *Index*. Das Definitionsgebiet kann allgemeiner die Form $\{k, k+1, k+2, \dots\}$ haben, wobei $k \in \mathbb{Z}$ eine beliebige ganze Zahl ist. Man schreibt dann $(a_n)_{n\geq k}$.

Eine Folge kann auf verschiedene Weisen gegeben sein:

- Bei der *expliziten Form* lässt sich jedes Folgenglied a_n mittels einer Formel unmittelbar aus dem Index n berechnen, z.B.

$$a_n = \sqrt[n]{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Bei der *rekursiven Form* sind einige Folgenglieder $a_1, a_2, \dots, a_m$ explizit gegeben. Alle weiteren Folgenglieder werden dann mittels einer Formel aus vorhergehenden berechnet. Das heißt, für alle $n > m$ wird a_n aus $a_1, \dots, a_{n-1}$ berechnet, z.B.

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n > 2.$$

6.2 Eigenschaften: Eine Folge a heißt

- *konstant*, wenn alle Folgenglieder denselben Wert haben.
- *positiv/negativ*, wenn alle Folgenglieder positiv bzw. negativ sind.
- *alternierend*, wenn aufeinanderfolgende Folgenglieder verschiedenes Vorzeichen haben, d.h.,

$$a_{n+1}a_n < 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- *monoton wachsend/fallend*, wenn

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \text{bzw.} \quad a_{n+1} \leq a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- *streng monoton wachsend/fallend*, wenn

$$a_{n+1} > a_n \quad \text{bzw.} \quad a_{n+1} < a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- *beschränkt*, wenn es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$|a_n| \leq c, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alle Eigenschaften einer Folge können mit dem Zusatz *„fast überall (f.ü.)"* versehen werden. Dies bedeutet, dass diese Eigenschaft erst ab einem gewissen Index n_0 durchgängig erfüllt ist und für die endlich vielen Indizes unterhalb von n_0 verletzt sein darf.

6.3 Beispiel:

- Die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = n^2 - 15$ ist streng monoton wachsend und f.ü. positiv.
- Die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = (-1)^n/n^2$ ist alternierend und beschränkt, da $|a_n| \leq 1$.
- Eine konstante Folge ist monoton wachsend, monoton fallend und beschränkt.

6.4 Nullfolge: Eine Folge $(a_n)_n$ heißt *Nullfolge*, wenn es für jedes beliebig vorgegebene $\varepsilon > 0$ eine Zahl n_0 gibt, sodass

$$|a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0.$$

6.5 Beispiel: Gegeben sei die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = 1/n$. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ wählt man $n_0 = 1/\varepsilon + 1$. Damit gilt für alle $n \geq n_0$

$$|a_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} = \frac{1}{1/\varepsilon + 1} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon.$$

Also ist $(a_n)_n$ eine Nullfolge.

6.6 Regeln: Sei $(a_n)_n$ eine Nullfolge, dann gilt:

- $(a_n)_n$ ist beschränkt.
- Sei $(b_n)_n$ eine Nullfolge, dann ist auch $(a_n \pm b_n)_n$ eine Nullfolge.
- Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, dann ist $(a_n \cdot c)_n$ eine Nullfolge.
- Sei $(c_n)_n$ eine beschränkte Folge, dann ist $(a_n \cdot c_n)_n$ eine Nullfolge.
- Sei $(d_n)_n$ eine Folge mit $|d_n| \leq |a_n|$ f.ü., dann ist $(d_n)_n$ eine Nullfolge.

6.7 Beispiel: Gegeben sei die Nullfolge $(a_n)_n$ mit $a_n = 1/n$.

- $(6/n)_n$ ist eine Nullfolge.
- Die Folge $(c_n)_n$ mit $c_n = \sin n - \pi$ ist beschränkt durch $|c_n| \leq 5$. Also ist
$$\left(\frac{\sin n - \pi}{n}\right)_n$$
eine Nullfolge.
- Sei
$$d_n = \frac{(-1)^n 5n}{n^2 - 3},$$
dann ist $|d_n| < |6/n|$ für $n \geq 5$. Also ist $(d_n)_n$ eine Nulfolge.
- Seien p und q zwei Polynome, dann ist die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = p(n)/q(n)$ genau dann eine Nullfolge, wenn $\operatorname{grad}(p) < \operatorname{grad}(q)$.

6.8 Grenzwert: Eine Folge $(a_n)_n$ heißt *konvergent mit Grenzwert (oder Limes)* a, wenn $(a_n - a)_n$ eine Nullfolge ist. Man schreibt dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

und liest: „Der Grenzwert von a_n für n gegen Unendlich ist a". Man beachte, dass das ∞-Symbol hier nur eine Schreibweise ist. In der Definition des Grenzwerts kommen nur *endliche* Werte von n vor. Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent*.

6.9 Regeln: Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei konvergente Folgen mit Grenzwert a bzw. b, dann gilt:

- Die Folge $(a_n)_n$ ist beschränkt, denn $|a_n - a| \le c$ [$\to$ 6.6] und

$$|a_n| = |a_n - a + a| \le |a_n - a| + |a| \le c + a.$$

- Die Folge $(\alpha a_n + \beta b_n)_n$ ist konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- Die Folge $(a_n \cdot b_n)_n$ ist konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

- Die Folge $(a_n / b_n)_n$ ist konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} (a_n / b_n) = a/b,$$

  sofern $b \ne 0$. Die Folge ist divergent, falls $a \ne 0$ und $b = 0$.

6.10 Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_0 + p_1 n + \cdots + p_k n^k}{q_0 + q_1 n + \cdots + q_k n^k} = \frac{p_k}{q_k}, \quad q_k \ne 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha q^n = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.718$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

6.11 Konvergenzkriterien:

- *Cauchy:* Eine Folge $(a_n)_n$ reeller Zahlen ist genau dann konvergent, wenn es für jedes beliebig vorgegebene $\varepsilon > 0$ eine Zahl n_0 gibt, sodass
$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n, m \geq n_0.$$
- *Intervallschachtelung:* Sei $(a_n)_m$ monoton wachsend, $(b_n)_n$ monoton fallend und $(b_n - a_n)_n$ eine Nullfolge. Dann konvergieren beide Folgen gegen denselben Grenzwert und es gilt
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \in [a_k,\, b_k], \quad k \in \mathbb{N}.$$
- Sei $(a_n)_n$ beschränkt und monoton f.ü., dann ist $(a_n)_n$ konvergent.

6.12 Bestimmte Divergenz: Eine Folge $(a_n)_n$ heißt *bestimmt divergent*, wenn sie f.ü. positiv oder f.ü. negativ ist und $(1/a_n)_n$ eine Nullfolge ist. Wir schreiben dann
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

6.13 Beispiel:

- Es gilt
$$\lim_{n\to\infty} e^n/n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \ln(1/n) = -\infty.$$
- Die Folge $(1+n+(-1)^n n)_n$ ist positiv und nicht beschränkt. Dennoch ist sie nicht bestimmt divergent, da alle ungeraden Folgenglieder der Wert 1 haben.

6.14 Vektorfolge: Eine Abbildung
$$n \mapsto \vec{a}_n,$$
die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ einen Vektor $\vec{a}_n \in \mathbb{R}^d$ zuweist, heißt *Vektorfolge* in $\mathbb{R}^d$. Man schreibt dafür $(\vec{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder auch kurz $(\vec{a}_n)_n$. Die Komponenten $a_{i,n}$ von $\vec{a}_n$ bilden die reellen Zahlenfolgen $(a_i)_n$,
$$\vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{d,n} \end{bmatrix}, \quad (\vec{a}_n)_n = \begin{bmatrix} (a_1)_n \\ (a_2)_n \\ \vdots \\ (a_d)_n \end{bmatrix}.$$
Die Vektorfolge $(\vec{a}_n)_n$ heißt *konvergent mit Grenzwert* $\vec{a}$, wenn alle Komponentenfolgen konvergieren,
$$\lim_{n\to\infty} \vec{a}_n = \vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{bmatrix}, \quad a_i = \lim_{n\to\infty} a_{i,n}.$$

6.15 Funktionenfolge: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Abbildung

$$n \mapsto f_n,$$

die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_n : I \to \mathbb{R}$ zuweist, heißt *Funktionenfolge*. Man schreibt dafür $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder auch kurz $(f_n)_n$. Für festes $x \in I$ bilden die Funktionswerte $f_n(x)$ die reelle Zahlenfolge $(f_n(x))_n$. Die Funktionenfolge heißt *punktweise konvergent mit Grenzfunktion* f, wenn die Zahlenfolge $(f_n(x))_n$ für alle $x \in I$ konvergiert,

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \quad f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in I.$$

6.16 Beispiel: Für $f_n(x) = x^n,\ x \in [0,1]$, ist die Grenzfunktion gegeben durch

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}.$$

6.17 Beispiel: Die durch $f_n(x) = x^n,\ x \in [-1,1]$, gegebene Funktionenfolge ist divergent, da für $x = -1$ kein Grenzwert existiert.

6.18 Beispiel: Für $f_n(x) = (1 + x/n)^n,\ x \in \mathbb{R}$, ist die Grenzfunktion gegeben durch

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^x.$$

Es ist z.B.

$$f(-1) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}, \quad f(2) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2.$$