5 Eigenwerte und -vektoren

5.1 Fixgeraden: Eine Ursprungsgerade $g : t\vec{v}, t \in \mathbb{R}$, heißt *Fixgerade* der linearen Abbildung $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, wenn jeder Punkt auf g wieder auf einen Punkt auf g abgebildet wird. Anders als bei der Fix*punkt*geraden müssen hier Urbild und Bild nicht übereinstimmen. Betrachten wir das Bild $f(\vec{v}) = A\vec{v}$ des Richtungsvektors. Da es wieder auf der Geraden g liegt, muss es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, sodass

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Wenn dies der Fall ist, dann gilt natürlich für jeden anderen Punkt auf der Geraden die analoge Beziehung $A(t\vec{v}) = \lambda(t\vec{v})$. Der Faktor λ gibt also das Streckverhältnis zwischen Bild und Urbild für Punkte auf der Fixgeraden an. Insbesondere handelt es sich um eine Fixpunktgerade, wenn $\lambda = 1$.

5.2 Eigenwert und -vektor: Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. Ein Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ heißt *Eigenvektor* von A zum *Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{R}$, wenn

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Wenn $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A ist, dann ist auch jedes Vielfache $t\vec{v}$ ein Eigenvektor, sofern $t \neq 0$. Zur Bestimmung von Eigenwerten und Vektoren betrachtet man analog zur Bestimmung von Fixpunkten [→ 4.7] die Gleichung

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}. \tag{5.1}$$

Die Lösbarkeit dieses LGS hängt von der Determinante

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda E)$$

ab. Die Funktion p ist ein Polynom vom Grad n in der Variablen λ und wird als das *charakteristische Polynom* von A bezeichnet. Betrachten wir nun einen festen Wert λ.

- Falls $p(\lambda) \neq 0$, dann ist das LGS (5.1) eindeutig lösbar und es folgt $\vec{v} = \vec{0}$. Folglich ist $\vec{v}$ kein Eigenvektor und λ auch kein Eigenwert.
- Falls $p(\lambda) = 0$, dann besitzt (5.1) nichttriviale Lösungen. Es gibt also einen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ mit $(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$ und dies ist gerade ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Die Eigenwerte der Matrix A sind also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. Die zugehörigen Eigenvektoren bestimmen sich aus dem LGS $(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$.

5.3 Beispiel: Für

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -9 & -3 \\ 4 & -9 & -4 \\ -6 & 15 & 8 \end{bmatrix}$$

ist das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} (5-\lambda) & -9 & -3 \\ 4 & (-9-\lambda) & -4 \\ -6 & 15 & (8-\lambda) \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6.$$

Wenn es ganzzahlige Nullstellen gibt, so müssen sie Teiler des konstanten Terms -6 sein. Deshalb überprüft man zunächst die Teiler von -6: Es ist $\lambda = 1$ beispielsweise keine Nullstelle, aber $\lambda_1 := 2$ liefert $p(\lambda_1) = 0$. Nun teilt man p durch den Linearfaktor $(2 - \lambda)$ und erhält

$$q(\lambda) := p(\lambda) : (2 - \lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Die beiden restlichen Eigenwerte von A sind Nullstellen von q,

$$q(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 := 3, \quad \lambda_3 := -1.$$

Insgesamt erhält man also die Faktorisierung

$$p(\lambda) = (2 - \lambda)(3 - \lambda)(-1 - \lambda).$$

Der Eigenvektor zu λ_1 ergibt sich aus

$$(A - \lambda_1 E)\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 & -9 & -3 \\ 4 & -11 & -4 \\ -6 & 15 & 6 \end{bmatrix} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Analog erhält man

$$\vec{v}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Natürlich können auch beliebige Vielfache der angegebenen Eigenvektoren verwendet werden, z.B. $\vec{v}_2 = [0, -1, 3]^T$ oder $\vec{v}_3 = [7, 7, -7]^T$.

5.4 Regeln:

- Wenn $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ Eigenvektoren von A zum *selben* Eigenwert λ sind, dann ist auch $t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, sofern $t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 \neq \vec{0}$.

- Wenn $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist $\vec{v}$ ein Eigenwert von A^k zum Eigenwert λ^k. Falls A invertierbar ist, darf dabei darf auch $k = -1$ gewählt werden, d.h., die Eigenwerte der Inversen sind die Kehrwerte der Eigenwerte der gegebenen Matrix.

- Die Summe der Eigenwerte ist gleich der Summe der Diagonalelemente von A,

  $$\operatorname{spur} A := a_{1,1} + \cdots + a_{n,n} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

  Im Beispiel ist $\operatorname{spur} A = 5 - 9 + 8 = 4$ und $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + 3 - 1 = 4$.

- Das Produkt der Eigenwerte ist gleich der Determinante von A,

  $$\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

  Das heißt, eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn alle Eigenwerte von Null verschieden sind. Im Beispiel ist $\det A = -6$ und $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -6$.

- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

- Die Eigenwerte (aber nicht die Eigenvektoren!) von A und A^T stimmen überein.

5.5 Spezialfälle:

- Wenn A eine obere oder untere Dreiecksmatrix ist [→ 2.18], dann stimmen die Eigenwerte mit den Diagonalelementen überein,

  $$p(\lambda) = (a_{1,1} - \lambda)(a_{2,2} - \lambda) \cdots (a_{n,n} - \lambda), \quad \lambda_1 = a_{1,1},\ \lambda_2 = a_{2,2}, \ldots, \lambda_n = a_{n,n}.$$

  Insbesondere sind die Eigenwerte der Einheitsmatrix $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$.

- Wenn A symmetrisch ist, dann sind alle Eigenwerte reell und die zugehörigen Eigenvektoren können durch geeignete Normierung so gewählt werden, dass sie ein Orthonormalsystem bilden.

- Wenn ein Eigenwert eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, dann gibt es hierzu mindestens einen und höchstens k linear unabhängige Eigenvektoren.

5.6 Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = (3-\lambda)(7-\lambda)(-5-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 7,\ \lambda_3 = -5.$$

5.7 Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

Der Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$ ist $\vec{v}_1 = [0, 1, 1]^T$. Zu der doppelten Nullstelle $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dieses hat zwei linear unabhängige Lösungen, z.B. $\vec{v}_2 = [-1, 0, 1]^T$ und $\vec{v}_3 = [0, 1, 0]^T$.

5.8 Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = (1-\lambda)^3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Zu der dreifachen Nullstelle $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dieses hat nur eine linear unabhängige Lösung, $\vec{v} = [1, 0, 0]^T$. In Fällen wie diesem können anstelle der fehlenden Eigenvektoren sogenannte *Hauptvektoren* bestimmt werden (in der Literatur zu finden unter dem Stichwort *Jordan-Form*).

5.9 Diagonalisierung: Wenn es zu einer $(n \times n)$-Matrix A genau n linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ gibt, dann kann man diese zu einer $(n \times n)$-Matrix V zusammenfassen. Mit der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

erhält man dann

$$AV = VD \quad \text{bzw.} \quad D = V^{-1}AV \quad \text{bzw.} \quad A = VDV^{-1}.$$

Man sagt dann, dass A *diagonalisierbar* ist. Bezüglich der Basis aus Eigenvektoren [$\rightarrow$ 4.13] ist A also ähnlich zu einer Diagonalmatrix, $\tilde{A} = D$.

Eine weitere Anwendung der Diagonalierung ergibt sich bei dem Problem, Potenzen von Matrizen effizient zu berechnen. Man erhält

$$A^k = A \cdots A = (VDV^{-1}) \cdots (VDV^{-1}) = VD^kV^{-1},$$

wobei $D^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k)$.

5.10 Beispiel [$\rightarrow$ 5.3]: Für

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -9 & -3 \\ 4 & -9 & -4 \\ -6 & 15 & 8 \end{bmatrix}$$

erhält man

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} A^5 = VD^5V^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 3^5 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 65 & -99 & -33 \\ 244 & -489 & -244 \\ -666 & 1365 & 698 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$