4 Lineare Abbildungen

4.1 Lineare Abbildung: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt *lineare Abbildung* von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$, wenn für alle $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1) &= \alpha f(x_1) \\ f(x_1 + x_2) &= f(x_1) + f(x_2). \end{aligned}$$

Im Fall $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nennen wir f auch eine lineare Abbildung *in* $\mathbb{R}^n$.

4.2 Beispiel: Für einen gegebenen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\vec{x}) = \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle$$

linear.

4.3 Beispiel: Für eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mit

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

linear.

4.4 Matrixform: Seien $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ die Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^n$ dann kann jeder Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ in der Form

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j$$

dargestellt werden [$\to$ 1.11]. Für den Funktionswert der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle $\vec{x}$ gilt dann

$$f(\vec{x}) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(\vec{e}_j).$$

Er ist also durch die Funktionwerte $f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n)$ der Einheitsvektoren vollständig bestimmt. Verwenden wir diese Funktionswerte als Spaltenvektoren einer $(m \times n)$-Matrix A, d.h.,

$$A = [\vec{a}^1, \vec{a}^2, \ldots, \vec{a}^n], \quad \vec{a}^j := f(\vec{e}_j),$$

dann gilt

$$A\vec{x} = A\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j A\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{a}^j = \sum_{j=1}^{n} x_j f(\vec{e}_j) = f(\vec{x}).$$

Eine lineare Abbildung f kann also stets in der Matrixform $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ geschrieben werden. Die Matrix-Abbildungen gemäß Beispiel 4.3 umfassen also tatsächlich die Menge *aller* linearen Abbildungen.

4.5 Beispiel [→ 4.2]: Sei $\vec{a} = [a_1, \ldots, a_n]^T$, dann ist $\langle \vec{a}, \vec{e}_j \rangle = a_j$. Die Matrix A ist also durch den Zeilenvektor

$$A = [f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n)] = [a_1, \ldots, a_n] = \vec{a}^T$$

gegeben, $f(\vec{x}) = \vec{a}^T \vec{x}$.

4.6 Verkettung: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ sowie $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ und $g(\vec{y}) = B\vec{y}$ die zugehörigen linearen Abbildungen. Dann ist die *verkettete Abbildung* $h := f \circ g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch

$$h(\vec{y}) = f(g(\vec{y})) = f(B\vec{y}) = AB\vec{y}.$$

Die Matrizenmultiplikation entspricht also der Verkettung der zugehörigen linearen Abbildungen.

4.7 Fixpunkt: Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. Ein Punkt $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ heißt *Fixpunkt* von A, wenn $A\vec{v} = \vec{v}$. Die Menge aller Fixpunkte wird mit

$$\operatorname{fix} A := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : A\vec{v} = \vec{v}\}$$

bezeichnet. Wegen $A\vec{0} = \vec{0}$ ist der Nullvektor stets ein Fixpunkt, $\vec{0} \in \operatorname{fix} A$. Wenn $\vec{v} \in \operatorname{fix} A$ ein Fixpunkt von A ist, dann sind auch alle Punkte der Form $t\vec{v}$ Fixpunkte von A,

$$\vec{v} \in \operatorname{fix} A \quad \Rightarrow \quad t\vec{v} \in \operatorname{fix} A, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wenn $\vec{v} \neq \vec{0}$, dann nennt man die Gerade $g : t\vec{v},\ t \in \mathbb{R}$, eine *Fixpunktgerade* von A. Zur Bestimmung von Fixpunkten schreibt man

$$A\vec{v} = \vec{v} \quad \Rightarrow \quad A\vec{v} = E\vec{v} \quad \Rightarrow \quad (A - E)\vec{v} = \vec{0}.$$

Es gilt also

$$\operatorname{fix} A = \ker(A - E).$$

4.8 Beispiel [→ 3.22]: Es gilt

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A - E = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

und die Lösung der Fixpunktgleichung $(A - E)\vec{v} = \vec{0}$ ist die Fixpunktgerade

$$\operatorname{fix} A = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.9 Spezielle lineare Abbildungen in $\mathbb{R}^n$:

- Die *identische Abbildung* $f(\vec{x}) = \vec{x}$ ist gegeben durch $A = E$.
- Eine lineare Abbildung $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ heißt *Drehung*, wenn A orthogonal ist und $\det A = 1$ gilt. Drehungen sind *normerhaltend*, d.h., $\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$, denn

$$\|A\vec{x}\|^2 = (A\vec{x})^T \cdot (A\vec{x}) = \vec{x}^T (A^T A)\vec{x} = \vec{x}^T E \vec{x} = \vec{x}^T \vec{x} = \|\vec{x}\|^2.$$

- In $\mathbb{R}^2$ ist eine Drehung um den Ursprung um den Winkel φ gegeben durch [$\rightarrow$ 3.21]

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

- In $\mathbb{R}^3$ ist eine Drehung um die z-Achse um den Winkel φ gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Für allgemeine Drehmatrizen in $\mathbb{R}^3$ ist die Drehachse durch die Fixpunktgerade gegeben. Der Drehwinkel φ bestimmt sich gemäß der Formel

$$2\cos\varphi + 1 = \operatorname{spur} A,$$

wobei $\operatorname{spur} A := a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}$ die Summe der Diagonalelemente von A ist.

- Eine lineare Abbildung $f(\vec{x}) = \mathbb{A}\vec{x}$ heißt *Projektion*, wenn

$$A^2 = A$$

gilt. In diesem Fall ist jeder Bildpunkt $\vec{v} = A\vec{x}$ ein Fixpunkt von A, denn

$$A\vec{v} = A(A\vec{x}) = A^2\vec{x} = A\vec{x} = \vec{v}.$$

Das heißt, jeder Punkt $\vec{x}$ wird durch einmalige Anwendung der Abbildung f auf die Menge $\operatorname{fix} A$ abgebildet und bleibt bei weiteren Anwendungen der Abbildung dann unverändert. Die Projektion heißt *orthogonal*, wenn

$$\langle A\vec{x} - \vec{x}, A\vec{x}\rangle = 0$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

- Die orthogonale Projektion auf die Ursprungsgerade $g : t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$, ist durch

$$A_g := \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}^T}{\|\vec{v}\|^2}$$

gegeben. Insbesondere ist $d(\vec{x}, g) = \|A\vec{x} - \vec{x}\|$ der Abstand des Punktes $\vec{x}$ von der Geraden g [$\rightarrow$ 1.14].

- Sei $M : \langle \vec{x}, \vec{n}\rangle = 0$ eine implizit gegebene Menge, also z.B. eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ oder eine Ebene in $\mathbb{R}^3$. Die orthogonale Projektion auf M ist durch

$$A_M := E - \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}^T}{\|\vec{n}\|^2}$$

gegeben. Insbesondere ist $d(\vec{x}, M) = \|A\vec{x} - \vec{x}\|$ der Abstand des Punktes $\vec{x}$ von der Menge M [$\rightarrow$ 1.18], [$\rightarrow$ 1.24].

- Eine lineare Abbildung $g(\vec{x}) = B\vec{x}$ heißt *Spiegelung*, wenn
$$B^2 = E$$
gilt. Zweimaliges Spiegeln führt also auf den Ausgangspunkt zurück. Wenn A eine Projektion ist, dann ist
$$B := 2A - E$$
eine Spiegelung an der Menge $\operatorname{fix} A = \operatorname{fix} B$, denn
$$B^2 = (2A - E) \cdot (2A - E) = 4A^2 - 2AE - 2EA + E^2 = E$$
und
$$B\vec{v} = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad 2A\vec{v} - \vec{v} = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad A\vec{v} = \vec{v}.$$
Umgekehrt ist für eine Spielgelung B die Matrix
$$A := \frac{1}{2}(B + E)$$
eine Projektion, denn
$$A^2 = \frac{1}{4}(B + E) \cdot (B + E) = \frac{1}{4}(B^2 + BE + EB + E^2) = \frac{1}{4}(2B + 2E) = A.$$
  - Die Spiegelung an der Geraden $g : t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$, ist gegeben durch
  $$B_g := 2A_g - E = 2\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}^T}{\|\vec{v}\|^2} - E.$$
  - Die Spiegelung an der Menge $M : \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = 0$ ist gegeben durch
  $$B_M := 2A_M - E = E - 2\,\frac{\vec{n} \cdot \vec{n}^T}{\|\vec{n}\|^2}.$$
  Diese Abbildung wird auch *Householder-Transformation* genannt.

4.10 Beispiel [→ 3.22]: Die Marix
$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$
ist orthogonal und es gilt $\det A = 1$. Also ist A eine Drehung. Gemäß Beispiel 4.8 ist die Drehgerade gegeben durch $g : t[1, 1, 1]^T$, $t \in \mathbb{R}$, und für den Drehwinkel gilt
$$2\cos\varphi + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = 1/2 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pm\pi/3.$$
Das Vorzeichen des Drehwinkels hängt davon ab, aus welcher Richtung man auf die Drechachse schaut.

4.11 Beispiel: Sei $\vec{v} = [2, 1]^T$. Die orthogonale Projektion auf die Gerade $g : t\vec{v}, t \in \mathbb{R}$, ist
$$A_g = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
und die Spiegelung an der Geraden ist
$$B_g = 2A - E = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

4.12 Beispiel: Sei $\vec{n} = [1, 2, -1]^T$. Die orthogonale Projektion auf die Ebene $M : \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = 0$ ist

$$A_M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

und die Spiegelung an der Ebene ist

$$B_M = 2A_M - E = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

4.13 Basiswechsel: Ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ kann als Linearkombination der Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ dargestellt werden [$\to$ 1.11],

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j.$$

Die Komponenten $x_1, \ldots, x_n$ bezeichnen wir als die *kartesischen Koordinaten* von $\vec{x}$. Wir versuchen nun, $\vec{x}$ als Linearkombination eines anderen Systems $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ von n Vektoren in $\mathbb{R}^n$ darzustellen,

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{v}_j = V\vec{y}.$$

Dabei ist

$$V = [\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n]$$

eine $(n \times n)$-Matrix mit den Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ als Spalten. Bei gegebenem $\vec{x}$ ist also der Vektor $\vec{y} = [y_1, \ldots, y_n]^T$ der unbekannten Koeffizienten gesucht. Eine Lösung existiert und ist eindeutig, wenn $\det V \neq 0$. In diesem Fall nennen wir die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ eine *Basis* des $\mathbb{R}^n$ und erhalten $\vec{y} = V^{-1}\vec{x}$. Die Komponenten $y_1, \ldots, y_n$ von $\vec{y}$ bezeichnen wir als die *V-Koordinaten* von $\vec{x}$. Die Matrix V beschreibt den Übergang der V-Koordinaten zu den kartesischen Koordinaten und V^{-1} den umgekehrten Vorgang,

$$\vec{x} = V\vec{y}, \quad \vec{y} = V^{-1}\vec{x}.$$

Diesen Zusammenhang nennt man *Basiswechsel*. Sei nun $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ eine lineare Abbildung in $\mathbb{R}^n$. Die Darstellung von f im V-Koordinatensystem hat die Form

$$\tilde{f}(\vec{y}) = \tilde{A}\vec{y}, \quad \tilde{A} := V^{-1}AV.$$

Die Matrizen A und $\tilde{A}$ heißen *äquivalent*, da sie dieselbe lineare Abbildung (allerdings bezüglich verschiedener Kooridinatensysteme) beschreiben. Durch geeignete Wahl eines Koordinatensystems kann man erreichen, dass die Matrix einer linearen Abbildung eine besonders einfache Gestalt erhält.

Bilden die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ speziell ein Orthonormalsystem [$\to$ 3.20], dann ist die Matrix V orthogonal und es gilt

$$\tilde{f}(\vec{y}) = \tilde{A}\vec{y}, \quad \tilde{A} := V^T AV.$$

Für $\vec{x}_1 = V\vec{y}_1$ und $\vec{x}_2 = V\vec{y}_2$ erhalten wir dann für das Skalarprodukt

$$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = \langle V\vec{y}_1, V\vec{y}_2 \rangle = \langle \vec{y}_1, V^T V\vec{y}_2 \rangle = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2 \rangle.$$

In diesem Fall bleiben also unter dem Basiswechsel alle Skalarprodukte und damit auch alle Längen und Winkel erhalten.

4.14 Beispiel [→ 4.11]: Sei $\vec{v}_1 = [2,1]^T$ und $\vec{v}_2 = [-1,2]$, dann ist

$$V = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad V^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Die Projektion A_g und die Spiegelung B_g haben in V-Koordinaten die Form

$$\tilde{A}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

4.15 Beispiel [→ 4.12]: Die Matrix

$$V = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ist orthogonal, $VV^T = E$. Die Drehmatrix A geht durch Basiswechsel über in

$$\tilde{A} = V^T A V = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mit $\varphi = -\pi/3$ ist dies gerade die in 4.9 angegebene Form einer Drehung um die dritte Koordinatenachse. Diese ist hier durch den dritten Basisvektor $\vec{v}_3 = \sqrt{2}\,[1,1,1]^T$ gegeben und stimmt also mit der zuvor bestimmten Drehachse überein.

4.16 Beispiel [→ 4.15]: Sei V wie zuvor und

$$f(\vec{x}) := \vec{x} \times [1,1,1]^T.$$

Die Matrixform von f ist

$$f(\vec{x}) = [f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)]\vec{x} = A\vec{x}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

und man erhält

$$\tilde{A} = V^T A V = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diese Matrix lässt sich in der Form $\tilde{A} = \tilde{A}_3 \cdot \tilde{A}_2 \cdot \tilde{A}_1$ in Faktoren zerlegen, wobei

$$\tilde{A}_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_3 := \sqrt{3}E.$$

Die Abbildung $\tilde{A}_1$ ist eine Projektion in die $\vec{v}_1\vec{v}_2$-Ebene, $\tilde{A}_2$ ist eine Drehung um die $\vec{v}_3$-Achse um den Winkel $-\pi/2$, und $\tilde{A}_3$ ist eine Streckung um den Faktor $\sqrt{3}$. Die Abbildung f lässt sich also als Verkettung einer Projektion, einer Drehung und einer Streckung deuten.