3 Matrizenrechnung

3.1 Transponierter Vektor: Die Notation $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ bezieht sich per Definition[1] immer auf einen stehenden Vektor,

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Der *transponierte Vektor* $\vec{x}^T$ ist das zugehörige liegende Zahlenschema

$$\vec{x}^T := [x_1, x_2, \ldots, x_n],$$

das man auch als *liegenden Vektor* bezeichnet. Die Transposition eines liegenden Vektors ergibt wieder einen stehenden Vektor,

$$\vec{x} = (\vec{x}^T)^T = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T.$$

3.2 Matrix: Ein Zahlenschema der Form

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

heißt $(m \times n)$-*Matrix*. Im Fall $n = m$ heißt die Matrix *quadratisch*. Die Einträge $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ heißen *Elemente* der Matrix. Analog zur Schreibweise $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ für Vektoren schreiben wir $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ für $(m \times n)$-Matrizen. Die *Spalten* der Matrix A sind Vektoren in $\mathbb{R}^m$,

$$A = [\vec{a}^1, \vec{a}^2, \ldots, \vec{a}^n], \quad \vec{a}^j := \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{bmatrix}.$$

Die *Zeilen* der Matrix A sind liegende Vektoren in $\mathbb{R}^n$,

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vec{a}_2^T \\ \vdots \\ \vec{a}_m^T \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_i^T := [a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}].$$

3.3 Beispiel: Die (3×4)-Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ sei gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$a_{3,2} = 7, \quad \vec{a}^3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2^T = [1, 5, 2, 0], \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

[1] Diese Definition bezieht sich auf das vorliegende Skript und ist keineswegs allgemeingültig.

3.4 Addition und Skalarmultiplikation: Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zwei Matrizen gleicher Dimension, dann gilt Folgendes:

- *Addition, Subtraktion:* $C := A \pm B$ ist eine $(m \times n)$-Matrix mit Elementen
$$c_{i,j} = a_{i,j} \pm b_{i,j}.$$
- *Skalarmultiplikation:* Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $C := \alpha A$ eine $(m \times n)$-Matrix mit Elementen
$$c_{i,j} = \alpha a_{i,j}.$$
Insbesondere ist $1A = A$, $(-1)A = -A$ und
$$0A = 0_{m,n} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$
die $(m \times n)$-*Nullmatrix*. Wenn die Dimension der Nullmatrix aus dem Zusammenhang klar ist, schreiben wir anstelle von $0_{m,n}$ auch einfach 0.
- *Distributivgesetze:* Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt
$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$$

3.5 Matrizenprodukt: Sei A eine $(m \times n)$-Matrix und B eine $(n \times k)$-Matrix. Dann ist das *Matrizenprodukt* $C := A \cdot B$ eine $(m \times k)$-Matrix, die durch
$$c_{i,j} = \langle \vec{a}_i, \vec{b}^j \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k}$$
definiert ist. Das Element $c_{i,j}$ ist also das Skalarprodukt der i-ten Zeile von A mit der j-ten Spalte von B. Insbesondere macht das Matrizenprodukt nur dann Sinn, wenn die Spaltenzahl von n mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt, da anderenfalls das Skalarprodukt nicht erklärt ist. Der Mal-Punkt wird meist weggelassen, wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, also $AB = A \cdot B$.

3.6 Beispiel: Für
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
ist
$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 14 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B \cdot B = B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -10 & 4 & 7 \\ -15 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$
Die Produkte $A \cdot A$ und $B \cdot A$ sind nicht definiert.

3.7 Vektoren als spezielle Matrizen: Ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ kann als $(n \times 1)$-Matrix aufgefasst werden, also als Matrix mit nur einer Spalte. Genauso kann der liegende Vektor $\vec{x}^T$ als $(1 \times n)$-Matrix aufgefasst werden, also als Matrix mit nur einer Zeile. In diesem Sinne ist für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ das Matrizenprodukt $\vec{b} = A \cdot \vec{x}$ ein Vektor in $\mathbb{R}^m$ mit Komponenten

$$b_i = \langle \vec{a}_i, \vec{x} \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j.$$

Dies erklärt insbesondere die in 2.4 eingeführte Schreibweise für lineare Gleichungssysteme. Man kann den Vektor $\vec{b}$ auch als Linearkombination der Spalten von A deuten,

$$\vec{b} = A\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \vec{a}^j x_j.$$

Analog ist für $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ das Matrizenprodukt $\vec{c}^T = \vec{y}^T A$ ein liegender Vektor mit Komponenten

$$c_j = \langle \vec{y}, \vec{a}^j \rangle,$$

der auch als Linearkombination der Zeilen von A gedeutet werden kann,

$$\vec{c}^T = \vec{y}^T A = \sum_{i=1}^{m} \vec{a}_i^T y_i.$$

Sind $\vec{x}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren gleicher Länge, dann ist das Matrizenprodukt

$$\vec{x}^T \cdot \vec{z} = \sum_{j=1}^{n} x_j z_j = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$$

gerade das Skalarprodukt der beiden Vektoren. Für beliebige Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ ist aber auch das Produkt

$$B = \vec{x} \cdot \vec{y}^T = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_m \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_m \end{bmatrix}$$

definiert. *Merke:*

- Liegender Vektor mal stehender Vektor ergibt eine reelle Zahl.
- Stehender Vektor mal liegender Vektor ergibt eine Matrix.

3.8 Beispiel: Für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ist

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{y}^T A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}^T \vec{z} = 5, \quad \vec{x}\,\vec{y}^T = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Meist werden die Komponenten liegender Vektoren durch Kommata und Matrizenelemente durch Zwischenraum getrennt. Da einzeilige Matrizen aber liegenden Vektoren entsprechen, werden hier beide Varianten verwendet. Man schreibt also auch $\vec{y}^T A = [2, 4, 5]$. Dies entspricht im Übrigen den Konventionen der Programmiersprache Matlab, bei der Matrizenelemente einer Zeile entweder durch ein Leerzeichen oder durch ein Komma getrennt werden können.

3.9 Rechenregeln:

- Für die Matrizenmultiplikation gilt das *Assoziativgesetz*, d.h., es gilt

  $$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

  Nachdem die Reihenfolge der Berechnung beliebig ist, schreibt man für das Produkt auch kurz ABC.

- Das *Kommutativgesetz* gilt dagegen *nicht*, d.h., im Allgemeinen ist

  $$AB \neq BA.$$

- Aus $AB = 0$ folgt *nicht* $A = 0$ oder $B = 0$.

3.10 Beispiel: Für

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ist

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.11 Transposition: Die *Transponierte* einer $(m \times n)$-Matrix A ist eine $(n \times m)$-Matrix, die mit A^T bezeichnet wird. Die Spalten von A^T sind die transponierten Zeilen von A,

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vec{a}_2^T \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m].$$

Es gilt

- $(A^T)^T = A$.
- $(AB)^T = B^T A^T$.
- $\langle A\vec{x}, \vec{y}\rangle = (A\vec{x})^T \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \cdot (A^T\vec{y}) = \langle \vec{x}, A^T\vec{y}\rangle$.

Eine quadratische Matrix A heißt *symmetrisch*, wenn $A^T = A$. Es gilt

- Die Summe symmetrischer Matrizen ist symmetrisch.
- Das Produkt symmetrischer Matrizen ist im Allgemeinen *nicht* symmetrisch.
- Für beliebiges A ist sowohl $A^T + A$ als auch $A^T \cdot A$ symmetrisch.

3.12 Beispiel: Für

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ist

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T + A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^T A = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Insbesondere sind $A^T + A$ und $A^T A$ symmetrisch.

3.13 Determinante [$\to$ 2.17]: Seien A und B zwei $(n \times n)$-Matrizen, dann gilt

- *Vielfaches:*
  $$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
  Achtung, Exponent von α beachten!
- *Produkt:*
  $$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$
- *Transponierte:*
  $$\det(A^T) = \det A$$

3.14 Matrix-Gleichungssysteme: Ein LGS der Form

$$AX = B$$

heißt auch *Matrix-Gleichungssystem*. Dabei sind $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ gegeben und $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ gesucht. Die Bestimmung der Lösung X erfolgt vollkommen analog zum Lösen linearer Gleichungssystem gemäß Kapitel 2, indem A auf gestaffelte Form gebracht wird. Nun sind auf der rechten Seite aber alle Spalten von B umzuformen, und die Kopfzeile des Lösungsschemas enthält die Zeilenvektoren von X. Die Kriterien für die Lösbarkeit sind vollkommen analog. Insbesondere ist auch ein Matrix-Gleichungssystem mit einer quadratischen Matrix A genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det A \neq 0$.

3.15 Beispiel: Gegeben sei das Matrix-Gleichungssystem $AX = B$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung X ist also eine (3×2)-Matrix. Für das Schema

	$\vec{x}_1^T$	$\vec{x}_2^T$	$\vec{x}_3^T$	$\vec{b}^1$	$\vec{b}^2$
$\boxed{1}$	2	0	1	2	7
$\boxed{2}$	1	2	1	3	1
$\boxed{3}$	2	1	2	3	5

liefert der Gauss-Algorithmus

	$\vec{x}_1^T$	$\vec{x}_2^T$	$\vec{x}_3^T$	$\vec{b}^1$	$\vec{b}^2$
$\boxed{1}$	2	0	1	2	7
$\boxed{4}$	0	4	1	4	−5
$\boxed{5}$	0	1	1	1	−2
$\boxed{1}$	2	0	1	2	7
$\boxed{4}$	0	4	1	4	−5
$\boxed{6}$	0	0	3	0	−3

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\boxed{6} &: 3\vec{x}_3^T = [0, -3] && \Rightarrow && \vec{x}_3^T = [0, -1] \\
\boxed{4} &: 4\vec{x}_2^T + \vec{x}_3^T = [4, -5] && \Rightarrow && \vec{x}_2^T = [1, -1] \\
\boxed{1} &: 2\vec{x}_1^T + \vec{x}_3^T = [2, 7] && \Rightarrow && \vec{x}_1^T = [1, 4]
\end{aligned}$$

und schließlich die Lösung

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.16 Einheitsmatrix: Die aus den Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ [→ 1.11] gebildete $(n \times n)$-Matrix

$$E_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n]$$

heißt *Einheitsmatrix*. Wenn die Dimension der Einheitsmatrix aus dem Zusammenhang klar ist, schreiben wir für E_n auch kurz E. Für eine beliebige $(m \times n)$-Matrix A gilt

$$AE_n = E_m A = A.$$

Für die Determinante gilt [→ 2.18] $\det E = 1$.

3.17 Inverse Matrix: Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. mit $\det A \neq 0$. Dann ist die Lösung des Matrix-Gleichungssystems

$$AX = E$$

eindeutig bestimmt. Sie wird *inverse Matrix* oder auch kurz *Inverse* von A genannt und mit A^{-1} bezeichnet. Matrizen mit $\det A = 0$ oder nicht-quadratische Matrizen besitzen keine Inverse. Es gilt

- $AA^{-1} = A^{-1}A = E$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$, da $1 = \det E = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$ [$\to$ 3.13].

Sei $AX = B$ ein beliebiges Gleichungssystem, dann erhält man nach Multiplikation von links mit A^{-1} die Lösung X,

$$AX = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad EX = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B.$$

Die Berechnung der Inversen lohnt sich immer dann, wenn wiederholt Gleichungssysteme mit derselben Matrix A und verschiedenen rechten Seiten gelöst werden müssen.

3.18 Beispiel: Für $n = 2$ gilt

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Im Nenner steht gerade $\det A = ad - bc$, sodass die angegebene Inverse für $\det A \neq 0$ definiert ist.

3.19 Beispiel: Für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

liefert der Gauss-Algorithmus

	$\vec{x}_1^T$	$\vec{x}_2^T$	$\vec{x}_3^T$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\boxed{1}$	1	2	1	1	0	0
$\boxed{2}$	1	1	2	0	1	0
$\boxed{3}$	2	1	1	0	0	1
$\boxed{4}$	0	−1	1	−1	1	0
$\boxed{5}$	0	−3	−1	−2	0	1
$\boxed{6}$	0	0	−4	1	−3	1

und damit

$$A^{-1} = X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.20 Orthogonale Matrizen: Eine $(n \times n)$-Matrix A heißt *orthogonal*, wenn

$$A^T A = E.$$

Für orthogonale Matrizen A und B gilt:

- $A^{-1} = A^T$.
- $AA^T = E$.
- A^T ist orthogonal.
- AB ist orthogonal.
- $\det A = \pm 1$, da $1 = \det E = \det(AA^T) = \det A \cdot \det A^T = (\det A)^2$.

Eine Matrix ist genau dann orthogonal, wenn ihre Spaltenvektoren ein *Orthonormalsystem* bilden, d.h., wenn die Vektoren Länge 1 haben und paarweise orthogonal sind,

$$\langle \vec{a}^i, \vec{a}^j \rangle = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$$

$\delta_{i,j}$ bezeichnet man als *Kronecker-Symbol.* Es hat den Wert 1 für $i = j$ und anderenfalls den Wert 0. Die Spaltenvektoren bilden genau dann ein Orthonormalsystem, wenn auch die Zeilenvektoren ein Orthonormalsystem bilden, d.h., wenn $\langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle = \delta_{i,j}$.

3.21 Beispiel: Für beliebige Winkel φ ist die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

orthogonal.

3.22 Beispiel: Die Matrix

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ist orthogonal.

3.23 Cramer'sche Regel: Wir betrachten nochmals das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ der Dimension $n \times n$. Es gilt stets $A\vec{e}_2 = \vec{a}^2, \ldots, A\vec{e}_n = \vec{a}^n$. Also können wir schreiben

$$A[\vec{x}, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n] = A_1 \quad \text{wobei} \quad A_1 := [\vec{b}, \vec{a}^2, \ldots, \vec{a}^n].$$

Die $(n \times n)$-Matrix A_1 auf der rechten Seite entsteht also dadurch, dass man die erste Spalte von A durch $\vec{b}$ ersetzt. Der zweite Faktor auf der rechten Seite ist ebenfalls eine $(n \times n)$-Matrix, die untere Dreiecksform hat, siehe 2.18. Ihre Determinante ist gleich dem Produkt der Diagonalelemente, also x_1. Man erhält schließlich für die erste Lösungskomponente mit Hilfe der Produktregel die Formel

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A},$$

sofern $\det A \neq 0$. Bezeichne allgemein A_k die $(n \times n)$-Matrix, die entseht, wenn man die k-te Spalte von A durch $\vec{b}$ ersetzt, dann gilt analog

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}.$$

Diese sogenannte Cramer'sche Regel ist in der Regel nur dann effizient, wenn man an einzelnen Lösungskomponenten, nicht aber am kompletten Vektor $\vec{x}$ interessiert ist.

3.24 Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt: Eine $(n \times n)$-Matrix A lässt sich stets als Produkt einer orthogonalen Matrix Q und einer oberen Dreiecksmatrix R schreiben,

$$A = QR, \quad Q = [\vec{q}^1, \dots, \vec{q}^n], \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}.$$

Die Spaltenvektoren $\vec{q}^1, \dots, \vec{q}^n$ und die zugehörigen Spalten der Matrix R werden wie folgt berechnet: Für die k-te Spalte ergibt sich die Bedingung

$$\vec{a}^k = r_{1k}\vec{q}^1 + \cdots + r_{kk}\vec{q}^k.$$

Multipliziert man diese skalar mit $\vec{q}^i$ für einen beliebigen Index $i < k$, dann erhält man aufgrund der Orthogonalität von Q die Koeffizienten

$$r_{ik} = \langle \vec{a}^k, \vec{q}^i \rangle. \tag{3.1}$$

Mit den so bestimmten Werten definieren wir den Hilfsvektor

$$\vec{p}^k := \vec{a}^k - \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik}\vec{q}^i \tag{3.2}$$

uns lösen die resultierende Gleichung $\vec{p}^k = r_{kk}\vec{q}^k$ durch

$$\vec{q}^k := \frac{\vec{p}^k}{\|\vec{p}^k\|}, \quad r_{kk} := \|\vec{p}^k\|. \tag{3.3}$$

Die tatsächliche Berechnung der Matrizen Q und R erfolgt nun sukkzessive:

- Man beginnt bei der ersten Spalte. Hier ist $k = 1$ und $\vec{p}^1 = \vec{a}^1$. Die Gleichung (3.3) liefert die Werte für $\vec{q}^1$ und r_{11}.

- Nun betrachtet man $k = 2$. Für die Bestimmung von r_{12} gemäß (3.1) ist nur der bereits bekannte Wert von $\vec{q}^1$ erforderlich. Also kann auch $\vec{p}^2$ gemäß (3.2) und damit $\vec{q}^2$ und r_{22} gemäß (3.3) berechnet werden.

- Für $k = 3$ lassen sich $\vec{p}^3, \vec{q}^3$ und alle r_{i3} berechnen, da die Werte der ersten und der zweiten Spalte bereits bekannt sind.

- Für beliebiges k verwendet man die zuvor berechneten Werte der Spalten 1 bis $k - 1$.

Mit Hilfe der QR-Zerlegung kann man das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ umwandeln in

$$R\vec{x} = Q^T\vec{b}.$$

Dieses System ist einfach zu lösen, da R gestaffelte Form hat. Die QR-Zerlegung ist insbesondere auch bei der näherungsweisen Lösung überbestimmter Gleichungssysteme nützlich (Stichwort *„Ausgleichsrechnung“*).