10 Komplexe Zahlen

10.1 Komplexe Multiplikation: Für zwei Vektoren

$$\vec{z}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{z}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

in $\mathbb{R}^2$ wird neben der üblichen Addition die *komplexe Multiplikation*

$$\vec{z}_1 * \vec{z}_2 := \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 \\ a_1 b_2 + b_1 a_2 \end{bmatrix}$$

definiert. Sie hat folgende Eigenschaften:

- *Kommutativgesetz:*
$$\vec{z}_1 * \vec{z}_2 = \vec{z}_2 * \vec{z}_1$$
- *Assoziativgesetz:*
$$\vec{z}_1 * (\vec{z}_2 * \vec{z}_3) = (\vec{z}_1 * \vec{z}_2) * \vec{z}_3$$
- *Distributivgesetz:*
$$\vec{z}_1 * (\vec{z}_2 + \vec{z}_3) = \vec{z}_1 * \vec{z}_2 + \vec{z}_1 * \vec{z}_3$$

Der Raum $\mathbb{R}^2$ versehen mit der komplexen Multiplikation wird *komplexe Zahlenebene* genannt und mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. Die Elemente von $\mathbb{C}$ heißen *komplexe Zahlen*.

10.2 Beispiel:

$$\vec{z}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{z}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{z}_1 * \vec{z}_2 = \vec{z}_2 * \vec{z}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

10.3 Einheiten: Die Einheitsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ in der komplexen Zahlenebene werden mit

$$\vec{1} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{i} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bezeichnet und *reelle Einheit* bzw. *imaginäre Einheit* genannt. Es gilt also

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\vec{1} + b\vec{i}.$$

Man bezeichnet a als *Realteil* und b als *Imaginärteil* der komplexen Zahl $\vec{z}$ und schreibt dafür

$$a = \operatorname{Re} \vec{z}, \quad b = \operatorname{Im} \vec{z}.$$

Für eine beliebige komplexe Zahl $\vec{z} = [a, b]^T$ gilt

$$\vec{1} * \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \vec{i} * \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}.$$

$\vec{1}$ ist also das *neutrale Element* der komplexen Multiplikation, während Multiplikation mit $\vec{i}$ den gegebenen Vektor $\vec{z}$ um den Winkel $\pi/2$ gegen den Uhrzeigersinn dreht. Insbesondere gilt

$$\vec{i} * \vec{i} = -\vec{1}.$$

Damit erhält die Multiplikationsregel nach dem Distributivgesetz die Form

$$\begin{aligned}(a_1\vec{1} + b_1\vec{i}) * (a_2\vec{1} + b_2\vec{i}) &= a_1 a_2(\vec{1} * \vec{1}) + a_1 b_2(\vec{1} * \vec{i}) + b_1 a_2(\vec{i} * \vec{1}) + b_1 b_2(\vec{i} * \vec{i}) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2)\vec{1} + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\vec{i}.\end{aligned}$$

10.4 Notation: Beim Rechnen mit komplexen Zahlen ist es üblich, die Vektorpfeile wegzulassen. Man schreibt also

$$z = a1 + bi \quad \text{für} \quad \vec{z} = a\vec{1} + b\vec{i}.$$

Weiterhin wird die Notation der reellen Einheit weggelassen. Man schreibt also

$$z = a + bi \quad \text{für} \quad z = a1 + bi.$$

Schließlich wird auch der Mal-Punkt nicht mit einem speziellen Symbol notiert. Man schreibt also

$$z_1 z_2 \text{ oder } z_1 \cdot z_2 \quad \text{für} \quad z_1 * z_2.$$

Die Rechenregeln lauten nun

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \\ (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i.\end{aligned}$$

Das Rechnen mit komplexen Zahlen folgt also denselben Gesetzen wie das Rechnen mit reellen Zahlen. Es ist lediglich die Regel

$$i \cdot i = i^2 = -1$$

zu beachten.

10.5 Beispiel [$\to$ 10.2]:

$$(2 + i) + (4 + 3i) = 6 + 4i, \quad (2 + i) \cdot (4 + 3i) = 5 + 10i$$

10.6 Polarkoordinaten: Der Punkt $z = a+bi$ kann entweder durch seine kartesischen Koordinaten (a, b) oder durch seine *Polarkoordinaten* (r, φ) definiert werden. Dabei ist r der Abstand vom Ursprung und φ der Winkel zur reelen Einheit 1,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Man nennt r den *Betrag* und φ das *Argument* von z und schreibt

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$

Das Argument φ wird im *mathematisch psoitiven Sinn*, also gegen den Uhrzeigersinn, gemessen. Weiterhin ist zu beachten, dass φ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist. Typischerweise wählt man $\varphi \in [0, 2\pi)$.

10.7 Beispiel: Für $z = 1 - i\sqrt{3}$ ist

$$\begin{aligned}&|z| = r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \\ &\cos\varphi = a/r = 1/2,\ \sin\varphi = b/r = -\sqrt{3}/2 \ \Rightarrow\ \arg z = \varphi = 5\pi/3.\end{aligned}$$

Es gilt also

$$1 - i\sqrt{3} = 2(\cos 5\pi/3 + i\sin 5\pi/3).$$

Man könnte anstelle von $\arg z = 5\pi/3$ auch $\arg z = -\pi/3$ oder $\arg z = 11\pi/3$ wählen.

10.8 Konjugation: Die Spiegelung einer komplexen Zahl an der reellen Achse bezeichnet man als *Konjugation* und schreibt dafür

$$\overline{z} = \overline{a+bi} = a - bi.$$

$\overline{z}$ wird die zu z *konjugiert komplexe Zahl* genannt. Es gilt

- $$\overline{\overline{z}} = z$$

- $$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

- $$z \cdot \overline{z} = (a+bi) \cdot (a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

- $$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

10.9 Division: Man berechnet den Quotienten zweier komplexer Zahlen, indem man mit dem konjugiert Komplexen des Nenners erweitert,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}, \quad z_2 \neq 0.$$

Damit ist der Nenner reell und die Division problemlos möglich. Division durch Null ist wie üblich ausgeschlossen.

10.10 Beispiel:

$$\frac{4+i}{2-3i} = \frac{(4+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{5+14i}{13} = \frac{5}{13} + \frac{14}{13}\,i$$

10.11 Geometrische Deutung der Multiplikation: Gegeben seien zwei komplexe Zahlen mit Polarkoordinaten (r_1, φ_1) und (r_2, φ_2), also

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \\ z_2 &= r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \end{aligned}$$

Berechnet man das Produkt, so erhält man

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \big((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)\big)$$

Gemäß der Additionstheoreme für Winkelfunktionen lässt sich dies einfacher schreiben als

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).$$

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen entspicht also einer *Multiplikation der Beträge* und einer *Addition der Argumente*. Genauso entspricht die Division zweier komplexer Zahlen einer *Division der Beträge* und einer *Subtraktion der Argumente*,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big).$$

10.12 Komplexe e-Funktion: Man definiert für rein imaginäre Argumente die e-Funktion durch

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Dieser Zusammenhang wird auch *Eulersche Formel* genannt. Es gilt $|e^{i\varphi}| = 1$. Das heißt, $e^{i\varphi}$ ist eine Zahl auf dem komplexen Einheitskreis, die durch den Winkel φ bestimmt ist. Damit hat eine komplexe Zahl mit Polarkoordinaten (r, φ) die Darstellung

$$z = re^{i\varphi}$$

und die Multiplikation bekommt die einfache Form

$$z_1 \cdot z_2 = \left(r_1 e^{i\varphi_1}\right) \cdot \left(r_2 e^{i\varphi_2}\right) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Definiert man die e-Funktion für beliebige komplexe Argumente $z = a + ib$ durch

$$e^{a+ib} := e^a \cdot e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b),$$

dann gilt allgemein

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}.$$

Die Bildmenge umfasst alle komplexen Zahlen mit Ausnahme der 0.

10.13 Beispiel:

$$e^0 = e^{2\pi i} = 1, \quad e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{-i\pi/2} = -i, \quad e^{2+i\pi} = -e^2$$

10.14 Komplexer Logarithmus: Die Umkehrfunktion der e-Funktion wird als *natürlicher Logarithmus* bezeichnet. Sei $w \neq 0$ gegeben, dann muss für $\ln w = z = a + bi$ gelten

$$e^z = e^a e^{ib} = w.$$

Hieraus folgt

$$|w| = e^a, \quad \arg w = b$$

und

$$\ln w = \ln|w| + i\arg w.$$

Es gelten die bekannten Regeln

$$\ln(w_1 \cdot w_2) = \ln w_1 + \ln w_2, \quad \ln(w_1/w_2) = \ln w_1 - \ln w_2.$$

Man beachte, dass der Logarithmus der Zahl 0 nicht definiert ist und dass sich die Mehrdeutigkeit des Arguments auf die Logarithmus-Funktion überträgt. Eindeutigkeit erhält man, indem man wieder $\arg w \in [0, 2\pi)$ fordert.

10.15 Beispiel:

$$\ln(-1) = i\pi, \quad \ln(-e) = 1 + i\pi, \quad \ln(i) = i\pi/2, \quad \ln(3+4i) = \ln 5 + i\arctan(4/3)$$

10.16 Komplexe Potenz-Funktion: Für komplexe Zahlen $x \neq 0$ und y definiert man die *Potenz* x^y durch

$$x^y := e^{y\ln x}.$$

Die komplexe *Wurzelfunktion* ist definiert durch

$$\sqrt[n]{z} := z^{1/n} = e^{(\ln z)/n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

10.17 Beispiel:

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{-\pi/2}, \quad \sqrt{-1} = e^{(\ln(-1))/2} = e^{i\pi/2} = i, \quad \sqrt{-16} = 4i$$

10.18 Nullstellen von Polynomen: Die Nullstellen eines quadratischen Polynoms

$$p(z) = az^2 + bz + c, \quad a \neq 0,$$

sind durch die Formel

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

gegeben. Dabei ist die Wurzel im komplexen Sinn zu verstehen und deshalb stets definiert. Es gibt also immer zwei (unter Umständen zusammenfallende) Lösungen einer quadratischen Gleichung im Komplexen.

Allgemein gilt der *Fundamentalsatz der Algebra*: Das Polynom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0$$

hat stets n komplexe Nullstellen.

10.19 Beispiel:

$$z^2 - 6z + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2i$$

10.20 Beispiel: Zur Lösung der Gleichung

$$z^3 - 8i = 0$$

setzt man $z = re^{i\varphi}$ und erhält

$$r^3 e^{3i\varphi} = 8e^{i\pi/2}.$$

Ein Vergleich der Beträge liefert $r = 2$, und für das Argument erhält man

$$3\varphi = \pi/2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dabei wurde verwendet, dass die e-Funktionen übereinstimmen, wenn sich die Argumente um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden. Man erhält eine Folge von Argumenten

$$\varphi_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

aber nur drei davon führen auf verschiedene Lösungen,

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6}, \quad \varphi_1 = \frac{5\pi}{6}, \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}.$$

Alle anderen Werte unterscheiden sich von den gegebenen drei um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π und liefern deshalb keine weiteren Lösungen. Man erhält schließlich

$$z_0 = 2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i, \quad z_1 = 2e^{5i\pi/6} = -\sqrt{3} + i, \quad z_2 = 2e^{3i\pi/2} = -2i.$$