Kurzskript zur Vorlesung
Mathematik I für MB, WI/MB und andere

Prof. Dr. Ulrich Reif

Inhalt:

Vorbemerkung:

Im vorliegenden Kurzskript werden wesentliche Begriffe, Resultate und Methoden der Vorlesung Mathematik I zusammen gestellt. Aufgrund des skizzenhaften Charakters kann es weder den Besuch der Vorlesung noch der Übungen ersetzen.

Korrekturen senden Sie bitte per Email an `reif@mathematik.tu-darmstadt.de`.

Mengen von Zahlen:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	natürliche Zahlen mit 0
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N}\}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R} =$ Menge aller Dezimalbrüche	reelle Zahlen
$\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$	positive reelle Zahlen
$\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$	nichtnegative reelle Zahlen
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	offenes Intervall
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	halboffenes Intervall
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	halboffenes Intervall
$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$	Menge der komplexen Zahlen

1 Vektorrechnung

1.1 Punkte in $\mathbb{R}^n$: Die Menge aller *Punkte*

$$P = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

mit *Koordinaten* $x_i \in \mathbb{R}$ wird mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Speziell erhält man für $n = 1$ die Zahlengerade $\mathbb{R}$, für $n = 2$ die Ebene $\mathbb{R}^2$ und für $n = 3$ den Raum $\mathbb{R}^3$.

1.2 Rechnen mit Punkten: Sei $P = [x_1, \dots, x_n]^T$ und $Q = [y_1, \dots, y_n]^T$, dann gilt

- *Addition, Subtraktion:*

$$P + Q = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}, \quad P - Q = \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{bmatrix}$$

- *Skalarmultiplikation:*

$$\alpha P = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

  Insbesondere ist $1P = P$, $(-1)P = -P$ und $0P = \vec{0} := [0, \dots, 0]^T$.

- *Distributivgesetze:*

$$(\alpha + \beta)P = \alpha P + \beta P, \quad \alpha(P + Q) = \alpha P + \alpha Q, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

1.3 Vektoren in $\mathbb{R}^n$: Seien $P, Q \in \mathbb{R}^n$ zwei Punkte, dann ist die Differenz

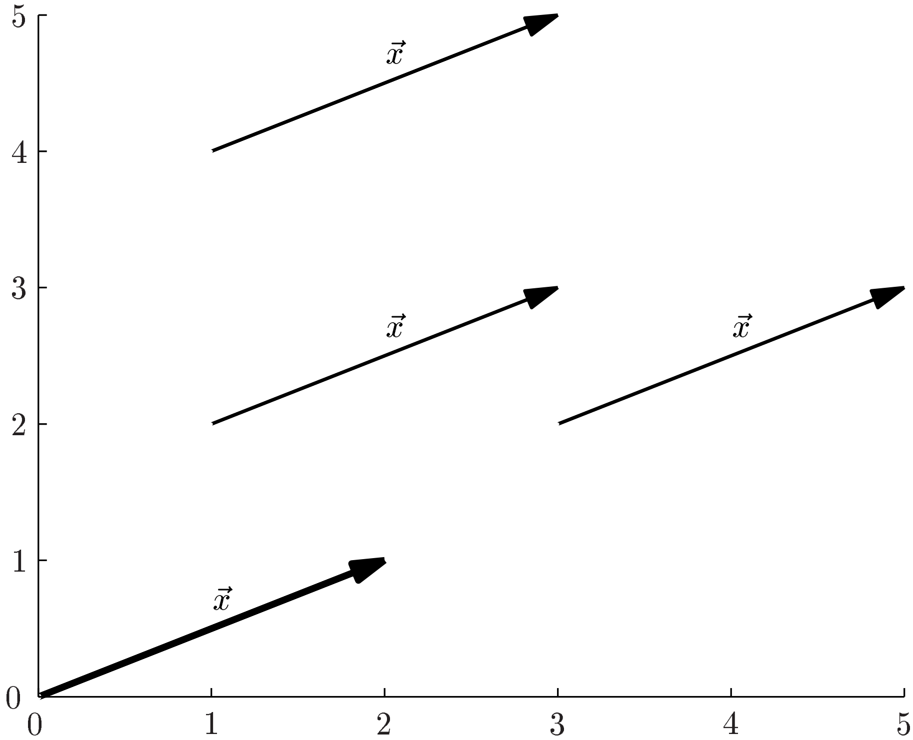
$$\vec{x} = P - Q$$

der *Vektor* vom Anfangspunkt Q zum Endpunkt P. Verschiedene Paare von Anfangs- und Endpunkten können denselben Vektor definieren. Die Lage eines Vektors im Raum ist also nicht eindeutig bestimmt, sondern kann durch eine Parallelverschiebung beliebig verändert werden. Im Folgenden ordnen wir einem Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ einen Vektor $\vec{x}$ dadurch eindeutig zu, indem wir als Anfangspunkt den Ursprung $Q = 0$ wählen,

$$\vec{x} = P - 0 = P.$$

Umgekehrt ist dadurch auch jedem Vektor eindeutig ein Punkt zugeordnet. Man nennt $\vec{x}$ dann auch den *Ortsvektor* von P. Aufgrund dieser Identifizierung übertragen sich alle Rechenregeln und Gesetze für Punkte direkt auf Vektoren.

1.4 Beispiel:



Die verschiedenen Punktepaare erzeugen alle denselben Vektor, z.B.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Fett gezeichnet ist der Ortsvektor zum Punkt $P = [2, 1]^T$.

1.5 Norm eines Vektors: Die *euklidische Norm* des Vektors $\vec{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ ist durch

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

definiert. Sie gibt die Länge des Vektors im geometrischen Sinne an und hat folgende Eigenschaften:

- *Positive Definitheit:*

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\| &> 0 \quad \text{für} \quad \vec{x} \neq \vec{0} \\ \|\vec{x}\| &= 0 \quad \text{für} \quad \vec{x} = \vec{0} \end{aligned}$$

- *Homogenität:*

$$\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha| \, \|\vec{x}\|, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- *Dreiecksungleichung:*

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\| &\leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \\ \|\vec{x} + \vec{y}\| &\geq \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \end{aligned}$$

1.6 Normierung: Sei $\vec{x} \neq \vec{0}$ ein Vektor, dann erhält man durch die *Normierung*

$$\vec{x}_0 := \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

einen Vektor $\vec{x}_0$ der Länge 1, der dieselbe Richtung wie $\vec{x}$ besitzt.

1.7 Skalarprodukt: Das *Skalarprodukt* zweier Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ heißen *orthogonal*, wenn

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0.$$

Die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ stehen dann im geometrischen Sinne senkrecht aufeinander. Der Nullvektor ist orthogonal zu allen anderen Vektoren. Skalarprodukt und Norm sind durch die Formeln

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|^2 &= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \\ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \frac{1}{4}\big(\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2\big) \end{aligned}$$

verknüpft.

1.8 Eigenschaften:

- *Symmetrie:*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$$

- *Linearität*

$$\begin{aligned} \alpha\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \langle \alpha\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \alpha\vec{y} \rangle, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ \langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y} \rangle &= \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle \\ \langle \vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \rangle &= \langle \vec{x}, \vec{y}_1 \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y}_2 \rangle \end{aligned}$$

- *Binomische Formel:*

$$\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$$

- Sei φ der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$, dann gilt

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cos\varphi.$$

- *Cauchy-Schwarz-Ungleichung:*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

1.9 Vektorprodukt: Das *Vektorprodukt* (auch Kreuzprodukt genannt) zweier Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}.$$

Das Ergebnis $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ ist also wieder ein Vektor in $\mathbb{R}^3$.

1.10 Eigenschaften:

- *Antisymmetrie:*
  $$\vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x})$$
  Daraus folgt insbesondere
  $$\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}.$$

- *Linearität:*
  $$\begin{aligned} \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) &= (\alpha\vec{x}) \times \vec{y} = \vec{x} \times (\alpha\vec{y}), \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \times \vec{y} &= \vec{x}_1 \times \vec{y} + \vec{x}_2 \times \vec{y} \\ \vec{x} \times (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) &= \vec{x} \times \vec{y}_1 + \vec{x} \times \vec{y}_2 \end{aligned}$$

- *Orthogonalität:*
  $$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{y} \rangle = 0$$

- Sei φ der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$, dann gilt
  $$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot |\sin\varphi|.$$
  $\vec{x} \times \vec{y}$ ist also ein Vektor, der senkrecht auf $\vec{x}$ und $\vec{y}$ steht und als Länge den Flächeninhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms besitzt.

- Die drei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}$ bilden in dieser Reihenfolge ein *Rechtssystem*. Das heißt anschaulich gesprochen folgendes: Wenn der Daumen und der Zeigefinger der rechten Hand in Richtung $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zeigen, dann zeigt der Mittelfinger in Richtung $\vec{x} \times \vec{y}$.

1.11 Linearkombination: Seien $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m$ Vektoren in $\mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ reelle Zahlen. Dann nennt man den Vektor

$$\vec{x} := \lambda_1\vec{p}_1 + \cdots + \lambda_m\vec{p}_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\vec{p}_i$$

eine *Linearkombination* der Vektoren $\vec{p}_i$ mit Koeffizienten λ_i. Die Vekoren $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m$ heißen *linear unabhängig*, wenn der Nullvektor dann und nur dann Ergebnis der Linearkombination ist, wenn alle Koeffizienten verschwinden,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\vec{p}_i = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0.$$

Wählt man speziell die *Einheitsvektoren*

$$\vec{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \ldots, \vec{e}_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

der Standardbasis, dann gilt für jeden Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i.$$

1.12 Geraden in $\mathbb{R}^n$: Seien $\vec{p}$ und $\vec{r}$ Vektoren in $\mathbb{R}^n$ und $\vec{r} \neq 0$. Die Gleichung

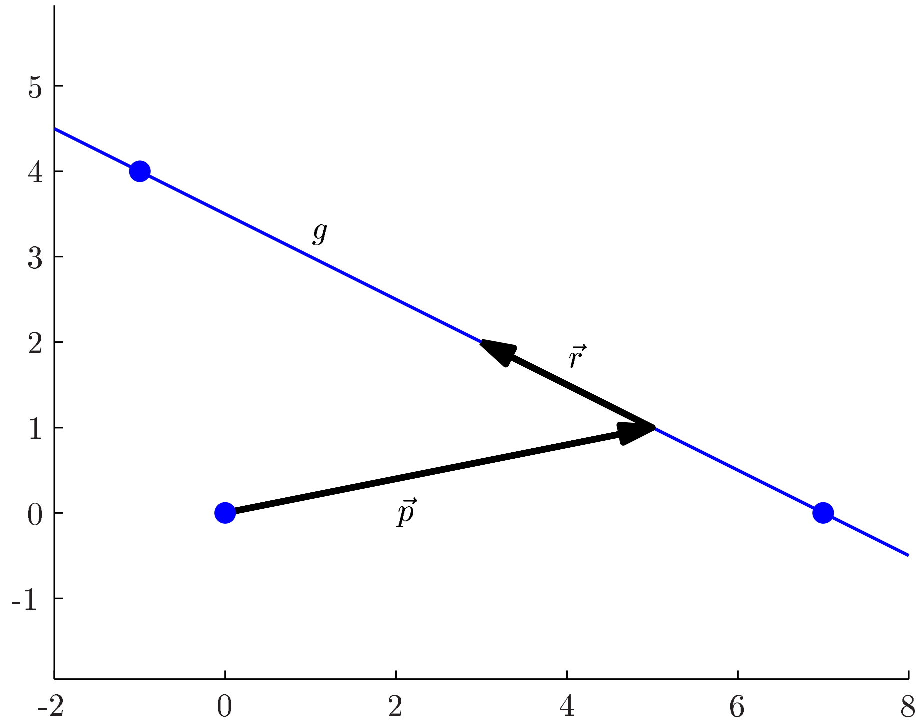
$$g \ : \ \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{r}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

beschreibt eine *Gerade in $\mathbb{R}^n$ in parametrisierter Form*. Man bezeichnet $\vec{p}$ als *Aufpunkt*, $\vec{r}$ als *Richtungsvektor* und λ als *Parameter* der Geraden g.

1.13 Beispiel: Im Bild ist $\vec{p} = [5, 1]^T$ und $\vec{r} = [-2, 1]^T$, also

$$g \ : \ \vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Für $\lambda = 3$ erhält man den Punkt $\vec{x} = [-1, 4]^T$ und für $\lambda = -1$ den Punkt $\vec{x} = [7, 0]^T$.



1.14 Abstand Punkt-Gerade: Der *Abstand* $d(\vec{q}, g)$ eines Punktes $\vec{q}$ von der Geraden $g : \vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{r}$ ist definiert als

$$d(\vec{q}, g) := \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\vec{x} - \vec{q}\|.$$

Dies ist also der kleinste Abstand, den ein Punkt auf der Geraden von $\vec{q}$ haben kann. Der Punkt $\vec{x}^* = \vec{p} + \lambda^*\vec{r}$, für den dieses Minimum angenommen wird, ist dadurch gekennzeichnet, dass der Verbindungsvektor zum Punkt $\vec{q}$ senkrecht zum Richtungsvektor $\vec{r}$ der Geraden ist,

$$\langle \vec{x}^* - \vec{q}, \vec{r} \rangle = \langle \vec{p} - \vec{q} + \lambda^*\vec{r}, \vec{r} \rangle = 0.$$

Löst man diese Gleichung nach λ^* auf, so erhält man

$$\lambda^* = \frac{\langle \vec{q} - \vec{p}, \vec{r} \rangle}{\langle \vec{r}, \vec{r} \rangle}$$

und damit $\vec{x}^*$. Schließlich ist

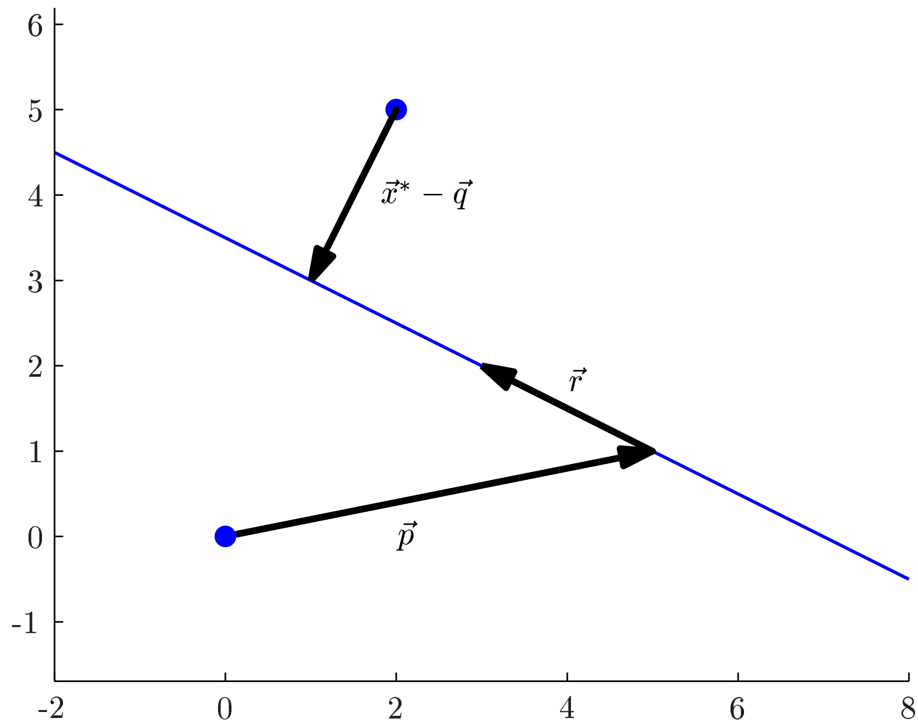
$$d(\vec{q}, g) = \|\vec{x}^* - \vec{q}\|.$$

1.15 Beispiel [→ 1.13]: Für $g : \vec{x} = [5, 1]^T + \lambda[-2, 1]^T$ und $\vec{q} = [2, 5]^T$ ist

$$\lambda^* = 2 \quad \text{und} \quad \vec{x}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Damit erhält man

$$d(\vec{q}, g) = \|\vec{x}^* - \vec{q}\| = \sqrt{5}.$$



1.16 Abstand Gerade-Gerade: Gegeben seien zwei Geraden in $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} g_1 &: \vec{x}_1 = \vec{p}_1 + \lambda_1 \vec{r}_1, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R} \\ g_2 &: \vec{x}_2 = \vec{p}_2 + \lambda_2 \vec{r}_2, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Der *Abstand* $d(g_1, g_2)$ der beiden Geraden voneinander ist definiert als

$$d(g_1, g_2) := \min_{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}} \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|.$$

Dies ist also der kleinste Abstand, den zwei Punkte auf den Geraden voneinander haben können. Das Punktepaar $\vec{x}_1^* = \vec{p}_1 + \lambda_1^* \vec{r}_1$, $\vec{x}_2^* = \vec{p}_2 + \lambda_2^* \vec{r}_2$, für den dieses Minimum angenommen wird, ist dadurch gekennzeichnet, dass der Verbindungsvektor senkrecht zu beiden Richtungsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ der Geraden ist. Dies führt auf zwei lineare Gleichungen für die beiden Parameter λ_1^*, λ_2^*, das man mit den Methoden, die im nächsten Kapitel beschrieben werden, lösen kann. Handelt es sich insbesondere um Geraden im Raum $\mathbb{R}^3$, so kann das Problem einfacher wie folgt gelöst werden: Der Vektor $\vec{n} := \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ steht senkrecht auf $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$. Falls $\vec{n} \neq 0$, dann gilt also für einen ebenfalls unbekannten Parameter $\mu \in \mathbb{R}$

$$\vec{x}_1^* - \vec{x}_2^* = \mu \vec{n}.$$

Multipliziert man diese Gleichung skalar mit $\vec{n}$, dann erhält man

$$\langle \vec{p}_1 - \vec{p}_2, \vec{n} \rangle = \mu \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\langle \vec{p}_1 - \vec{p}_2, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2},$$

da $\langle \vec{r}_1, \vec{n} \rangle = \langle \vec{r}_2, \vec{n} \rangle = 0$. Der Abstand ist also

$$d(g_1, g_2) = \|\mu \vec{n}\| = |\mu| \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{p}_1 - \vec{p}_2, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|}.$$

1.17 Geraden in impliziter Form: Sei

$$g : \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{r}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ und $\vec{n} \neq \vec{0}$ ein *Normalenvektor*. Dies ist ein Vektor, der senkrecht auf $\vec{r}$ steht, also $\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = 0$. Multipliziert man die Gleichung der Geraden skalar mit $\vec{n}$, dann erhält man die *implizite Form*

$$g : \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle.$$

Die Gerade g ist also die Menge aller Punkte $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, die diese Gleichung erfüllen. Auf der linken Seite steht eine Linearkombination der Komponenten von $\vec{x}$, und auf der rechten Seite steht die Konstante $d := \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle \in \mathbb{R}$. Einen Normalenvektor $\vec{n}$ erhält man beispielsweise gemäß

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} := \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}.$$

Damit lautet die implizite Form

$$g : bx - ay = d.$$

1.18 Hessesche Normalform: Normiert man speziell den Normalenvektor $\vec{n}$ auf Länge 1 [$\to$ 1.6], das heißt

$$\vec{n}_0 := \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|},$$

dann lautet die implizite Form

$$g \;:\; \langle \vec{x}, \vec{n}_0 \rangle = d_0, \quad \text{wobei} \quad d_0 := \langle \vec{p}, \vec{n}_0 \rangle = \frac{d}{\|\vec{n}\|}.$$

Diese bezeichnet man als die *Hessesche Normalform* der Geraden g. Sie ist dadurch ausgezeichnet, dass der Betrag der Konstanten d_0 den Abstand der Geraden vom Ursprung angibt, also

$$d(\vec{0}, g) = |d_0|.$$

Der Abstand eines beliebigen Punktes $\vec{q} \in \mathbb{R}^2$ von der Geraden ist durch

$$d(\vec{q}, g) = |d_0 - \langle \vec{q}, \vec{n}_0 \rangle|$$

gegeben.

1.19 Beispiel [$\to$ 1.15]: Sei $g : \vec{x} = [5,1]^T + \lambda[-2,1]^T$ und $\vec{q} = [2,5]^T$. Man erhält

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad d = \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle = 7$$

und damit die implizite Form

$$g \;:\; x + 2y = 7.$$

Beispielsweise erfüllen die Punkte $x = 7, y = 0$ und $x = -1, y = 4$ diese Gleichung [$\to$ 1.13]. Die Normierung

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad d_0 = \langle \vec{p}, \vec{n}_0 \rangle = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

liefert die Hessesche Normalform

$$g \;:\; \frac{1}{\sqrt{5}}\, x + \frac{2}{\sqrt{5}}\, y = \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Der Abstand der Geraden vom Ursprung ist also $d_0 = 7/\sqrt{5}$. Der Abstand des Punktes $\vec{q} = [2,5]^T$ ist wie zuvor

$$d(\vec{q}, g) = |7/\sqrt{5} - \langle [2,5]^T, [1,2]^T \rangle / \sqrt{5}| = \sqrt{5}.$$

1.20 Ebenen in $\mathbb{R}^3$: Seien $\vec{p}, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ Vektoren in $\mathbb{R}^3$ und $\vec{n} := \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \neq \vec{0}$. Die Gleichung

$$E \; : \; \vec{x} = \vec{p} + \lambda_1 \vec{r}_1 + \lambda_2 \vec{r}_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

beschreibt eine *Ebene in $\mathbb{R}^3$ in parametrisierter Form.* Man bezeichnet $\vec{p}$ als *Aufpunkt*, $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ als *Richtungsvektoren*, $\vec{n}$ als *Normalenvektor* und λ_1, λ_2 als *Parameter* der Ebene.

1.21 Abstand Punkt-Ebene: Der *Abstand* $d(\vec{q}, E)$ eines Punktes $\vec{q}$ von der Ebene $\vec{x} = \vec{p} + \lambda_1 \vec{r}_1 + \lambda_2 \vec{r}_2$ ist definiert als

$$d(\vec{q}, E) := \min_{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}} \|\vec{x} - \vec{q}\|.$$

Dies ist also der kleinste Abstand, den ein Punkt auf der Ebene von $\vec{q}$ haben kann. Der Punkt $\vec{x}^* = \vec{p} + \lambda_1^* \vec{r}_1 + \lambda_2^* \vec{r}_2$, für den dieses Minimum angenommen wird, ist dadurch gekennzeichnet, dass der Verbindungsvektor zum Punkt $\vec{q}$ senkrecht zu beiden Richtungsvektoren $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ der Ebene ist, d.h.,

$$\vec{x}^* - \vec{q} = \mu \vec{n}.$$

Multipliziert man diese Gleichung skalar mit $\vec{n}$, dann erhält man

$$\langle \vec{p} - \vec{q}, \vec{n} \rangle = \mu \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\langle \vec{p} - \vec{q}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2},$$

da $\langle \vec{r}_1, \vec{n} \rangle = \langle \vec{r}_2, \vec{n} \rangle = 0$. Der Abstand ist also

$$d(\vec{q}, E) = \|\mu \vec{n}\| = |\mu| \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{p} - \vec{q}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|}.$$

Man beachte die Analogie zur Berechnung des Abstands Gerade-Gerade.

1.22 Beispiel: Sei $\vec{p} = [1, 1, 5]^T$, $\vec{r}_1 = [3, 0, 1]^T$ und $\vec{r}_2 = [1, 2, -1]^T$, also

$$E \; : \; \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Dann ist der Normalenvektor gegeben durch

$$\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{n}\| = \sqrt{56}.$$

Der Abstand des Punktes $\vec{q} = [1, 0, 7]^T$ von der Ebene ist

$$d(\vec{q}, E) = \frac{|-8|}{\sqrt{56}} = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$

Dabei ist $\mu = -1/7$ und $\vec{x}^* = [9/7, -4/7, 43/7]^T$.

1.23 Ebenen in impliziter Form: Sei

$$E \; : \; \vec{x} = \vec{p} + \lambda_1 \vec{r}_1 + \lambda_2 \vec{r}_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ mit Normalenvektor $\vec{n}$. Multipliziert man die Gleichung der Ebene skalar mit $\vec{n}$, dann erhält man die *implizite Form*

$$E \; : \; \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle.$$

Die Ebene E ist also die Menge aller Punkte $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, die diese Gleichung erfüllen. Auf der linken Seite steht eine Linearkombination der Komponenten von $\vec{x}$, und auf der rechten Seite steht die Konstante $d := \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle \in \mathbb{R}$.

1.24 Hessesche Normalform: Normiert man speziell den Normalenvektor $\vec{n}$ auf Länge 1, d.h.,

$$\vec{n}_0 := \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|},$$

dann lautet die implizite Form

$$E \; : \; \langle \vec{x}, \vec{n}_0 \rangle = d_0, \quad \text{wobei} \quad d_0 := \langle \vec{p}, \vec{n}_0 \rangle = \frac{d}{\|\vec{n}\|}.$$

Diese bezeichnet man als die *Hessesche Normalform* der Ebene E. Sie ist dadurch ausgezeichnet, dass der Betrag der Konstanten d_0 den Abstand der Ebene vom Ursprung angibt, also

$$d(\vec{0}, E) = |d_0|.$$

Der Abstand eines beliebigen Punktes $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$ von der Ebene ist durch

$$d(\vec{q}, E) = |d_0 - \langle \vec{q}, \vec{n}_0 \rangle|$$

gegeben.

1.25 Beispiel [→ 1.22]: Mit $\vec{p} = [1, 1, 5]^T$, $\vec{n} = [-2, 4, 6]^T$ und $\vec{x} = [x, y, z]^T$ erhält man $d = \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle = 32$ und damit die implizite Form

$$E \; : \; -2x + 4y + 6z = 32.$$

Die Normierung

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad d_0 = \langle \vec{p}, \vec{n}_0 \rangle = \frac{16}{\sqrt{14}}$$

liefert die Hessesche Normalform

$$E \; : \; \frac{-1}{\sqrt{14}} x + \frac{2}{\sqrt{14}} y + \frac{3}{\sqrt{14}} z = \frac{16}{\sqrt{14}}.$$

Der Abstand der Ebene vom Ursprung ist also $d_0 = 16/\sqrt{14}$, und er Abstand des Punktes $\vec{q} = [1, 0, 7]^T$ von der Ebene ist wie zuvor

$$d(\vec{q}, E) = \left| 16/\sqrt{14} - 20/\sqrt{14} \right| = 4/\sqrt{14}.$$

1.26 Schnitt Ebene-Gerade: Zur Berechnung des Schnittpunkts $\vec{x}^*$ einer Ebene E mit einer Geraden g in $\mathbb{R}^3$ verwendet man zweckmäßigerweise für die Ebene die implizite und für die Gerade die parametrische Form,

$$\begin{aligned} E &: \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = d \\ g &: \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{r}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Setzt man die Geradengleichung in die Ebenengleichung ein, so erhält man die Bedingung

$$\langle \vec{p}, \vec{n} \rangle + \lambda^* \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = d \tag{1.1}$$

für den Parameter λ^* des Schnittpunkts. Nun sind folgende Fälle zu unterscheiden:

- Falls $\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle \neq 0$, dann ist der Schnittpunkt eindeutig bestimmt und durch

  $$\vec{x}^* = \vec{p} + \frac{d - \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle} \vec{r}$$

  gegeben.

- Falls $\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = 0$ und $\langle \vec{p}, \vec{n} \rangle = d$, dann ist Gleichung (1.1) für alle $\lambda^* \in \mathbb{R}$ erfüllt; es gibt also unendlich viele Lösungen. Dies bedeutet, dass die Gerade parallel zur Ebene ist und vollständig in dieser liegt.

- Falls $\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = 0$ und $\langle \vec{p}, \vec{n} \rangle \neq d$, dann ist Gleichung (1.1) für kein $\lambda^* \in \mathbb{R}$ erfüllt; es gibt also keinen Schnittpunkt. Dies bedeutet, dass die Gerade parallel zur Ebene ist und nicht in dieser liegt.