Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Math. N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
10. Februar 2010

# 13. Übungsblatt zur „Mathematik I für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Uneigentliches Integral)

(a) Berechne das uneigentliche Integral $\int_0^1 \ln x dx$.

(b) Überprüfe die Existenz des uneigentlichen Integrals $\int_0^\infty \sin x e^{-x^3} dx$.

**Lösung:**

(a) Die Funktion $\ln x$ ist nur auf $(0,1]$ definiert, daher muss man das Integral $\int_0^1 \ln x dx$ als uneigentliches verstehen, d.h $\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln x dx$. Mit Substitution $x = e^t$ gilt es $\int_\varepsilon^1 \ln x dx = \int_{\ln\varepsilon}^0 te^t dt = te^t \mid_{\ln\varepsilon}^0 -e^t \mid_{\ln\varepsilon}^0 = -\varepsilon\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon$. Daraus folgt, dass $\int_0^1 \ln x dx = \lim^1_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln x dx = -1$ ist.

(b) Wir müssen die Existenz von $\int_0^\infty \sin x e^{-x^3} dx$ nachzuweisen. Für $x \in [0,1]$ ist die Funktion $\sin x e^{-x^3}$ stetig und daher ist sie auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar. Es gilt für $x \geq 1$

$$x^3 \geq x \Leftrightarrow -x^3 \leq -x.$$

Daraus folgt, dass

$$|\sin x e^{-x^3}| \leq e^{-x^3} \leq e^{-x}.$$

Die letzte Ungleichung mit dem Vergleichskriterium und Beispiel (11) ergibt die Existenz des Integrals $\int_0^\infty \sin x e^{-x^3} dx$.

**Aufgabe G2** ( Integration rationaler Funktionen)

Bestimme folgende Integrale

(a) $\int \frac{2x^3-x^2-10x+19}{x^2+x-6} dx$,

(b) $\int \frac{x}{(x+1)^3} dx$.

**Lösung:**

(a) Es gilt $\int \frac{2x^3-x^2-10x+19}{x^2+x-6} dx = 2x-3+\frac{5x+1}{x^2+x-6} = 2x-3+\frac{5x+1}{(x-2)(x+3)}$. Für die rationale Funktion $\frac{5x+1}{(x-2)(x+3)}$ nehmen wir zunächst eine Partialbruchzerlegung vor. Wir setzen $\frac{5x+1}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-2)}$ und bestimmen die Koeffizienten $A, B$ durch Koeffizientenvergleich. Es gilt $\frac{5x+1}{(x-2)(x+3)} = \frac{(A+B)x+3B-2A}{(x-2)(x+3)}$. Aus $A+B=5$ und $3B-2A=1$ folgt, dass $A = \frac{14}{5}$ und $B = \frac{11}{5}$ ist. Daher ist $\int \frac{2x^3-x^2-10x+19}{x^2+x-6} dx = \int(2x-3)dx + A\int \frac{d(x+3)}{x+3} + B\int \frac{d(x-2)}{x-2} = x^2-3x+\frac{14}{5}\ln|x+3| + \frac{11}{5}\ln|x-2| + c$.

(b) Für die rationale Funktion $\frac{x}{(x+1)^3}$ nehmen wir zunächst eine Partialbruchzerlegung vor. Wir setzen $\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$ und bestimmen die Koeffizienten $A, B, C$ durch Koeffizientenvergleich. Es gilt $\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{Ax^2+(2A+B)x+B+A+C}{(x+3)^3}$. Aus $A = 0,\ 2A + B = 1$ und $B + A + C = 0$ folgt, dass $A = 0,\ B = 1$ und $C = -1$ ist. Daher ist $\int \frac{x}{(x+1)^3}dx = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} - \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^3} = -\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} + c.$

**Aufgabe G3** (Substitution)

Bestimme folgende Integrale

(a) $\int \frac{xdx}{1+x^4}$,

(b) $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3}dx.$

**Lösung:**

(a) Substitution $t = x^2,\ dt = 2xdx.$

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\arctan t + c = \frac{1}{2}\arctan x^2 + c.$$

(b) Substituition $t = x^3,\ dt = 3x^2dx.$

$$\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{3}\tan t + c = \frac{1}{3}\tan x^3 + c.$$

## Hausübung

**Aufgabe H1** (Uneigentliches Integral)

(a) Berechne die uneigentlichen Integrale $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bxdx$ und $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bxdx$ mit $a > 0$.

(b) Überprüfe die Existenz des uneigentlichen Integrals $\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx.$

**Lösung:**

(a) Nach der Aufgabe H1(b) aus Ü12 ist $\int_0^\varepsilon e^{-ax}\cos bxdx = \frac{b\sin bx - a\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax}\,|_0^\varepsilon = \frac{b\sin b\varepsilon - a\cos b\varepsilon}{a^2+b^2}e^{-a\varepsilon} + \frac{a}{a^2+b^2}$. Es gilt

$$\left|\frac{b\sin b\varepsilon - a\cos b\varepsilon}{a^2+b^2}e^{-a\varepsilon}\right| \le \left(\frac{b}{a^2+b^2} + \frac{a}{a^2+b^2}\right)e^{-a\varepsilon} \longrightarrow_{\varepsilon\to\infty} 0.$$

Daraus folgt, dass $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bxdx = \frac{a}{a^2+b^2}$.

Analog zeigt man, dass$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bxdx = \frac{b}{a^2+b^2}$ ist.

(b) Es gilt $x^4 + 1 \le 2x^4$ für $x \ge 1$. Daraus folgt, dass

$$\frac{x}{\sqrt{x^4+1}} \ge \frac{x}{\sqrt{2}x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}x}.$$

Nach dem Vergleichskriterium und Beispiel (7) divergiert das Integral $\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx.$

**Aufgabe H2** (Integration rationaler Funktionen)

Bestimme folgende Integrale

(a) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx,$

(b) $\int \frac{x}{x^3-3x+2}dx$.

**Lösung:**

(a) Für die rationale Funktion $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$ nehmen wir zunächst eine Partialbruchzerlegung vor. Wir setzen $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1}$ und bestimmen die Koeffizienten $A, B, C$ durch Koeffizientenvergleich. Es gilt $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{(A+C)x^2+(B+2C)x-A-B+C}{(x+1)^2(x-1)}$. Aus $A+C=1$, $3B+2C=0$ und $-A-B+C=1$ folgt, dass $A=\frac{1}{2}$, $B=-1$ und $C=\frac{1}{2}$ ist. Daher ist $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx = A\int \frac{d(x+1)}{x+1} + B\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} + C\int \frac{d(x-1)}{x-1} = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \frac{1}{x+1} + c$.

(b) Für die rationale Funktion $\frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{x}{(x-1)^2(x+2)}$ nehmen wir zunächst eine Partialbruchzerlegung vor. Wir setzen $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$ und bestimmen die Koeffizienten $A, B, C$ durch Koeffizientenvergleich. Es gilt $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{(A+C)x^2+(A+B-2C)x-2A+2B+C}{(x-1)^2(x+2)}$. Aus $A+C=0$, $A+B-2C=1$ und $-2A+2B+C=0$ folgt, dass $A=\frac{2}{9}$, $B=\frac{1}{3}$ und $C=-\frac{2}{9}$ ist. Daher ist $\int \frac{x}{x^3-3x+2}dx = -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9}\ln|\frac{x-1}{x+2}| + c$.

**Aufgabe H3** (Substitution)

Bestimme folgende Integrale

(a) $\int \frac{dx}{x\ln^2|x|}$,

(b) $\int \tan x dx$,

(c) $\int \frac{1}{x^2}\tan\frac{1}{x}dx$.

**Lösung:**

(a) Substitution $t = \ln|x|$, $dt = \frac{1}{x}dx$.

$$\int \frac{dx}{x\ln^2|x|} = \int \frac{dt}{t^2} = -t^{-1} + c = -\frac{1}{\ln|x|} + c.$$

(b) Substitution $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$.

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c.$$

(c) Substitution $t = \frac{1}{x}$, $dt = -\frac{1}{x^2}dx$.

$$\int \frac{1}{x^2}\tan\frac{1}{x}dx = -\int \tan t dt = \ln|\cos t| + c = -\ln|\cos\frac{1}{x}| + c.$$