Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Math. N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
3. Februar 2010

12. Übungsblatt zur „Mathematik I für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Substitution)

Berechne

(a) $\int xe^{x^2}\,dx$,

(b) $\int(\cos x+\cos^3 x)dx$

mittels Substitution.

Lösung:

(a) $\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int(2x)e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^y dy = \frac{1}{2}(e^y)+c = \frac{1}{2}(e^{x^2})+c$. Substitution $y=x^2$.

(b) $\int(\cos x+\cos^3 x)dx = \int(2-\sin^2 x)\cos x\,dx = \int(2-y^2)dy = 2y-\frac{1}{3}y^3+c = 2\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+c$. Substitution $y=\sin x$.

Aufgabe G2 (Partielle Integration, Substitutionsregel)

Bestimme folgende Integrale

(a) $\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx$ mit $a<x<b$.
Substitution $x=a\cos^2\phi+b\sin^2\phi$ $(0<\phi<\frac{\pi}{2})$,

(b) $\int x^3\ln x dx$,

(c) $\int \arctan x dx$.

Lösung:

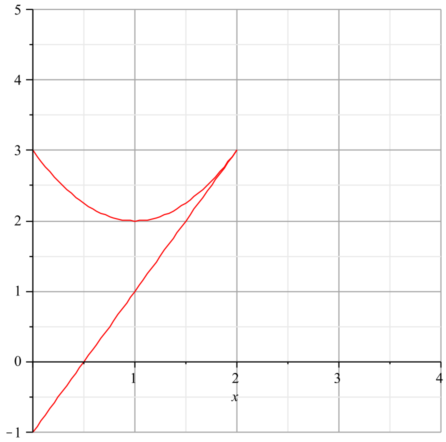
(a) Mit Substitution $x=a\cos^2\phi+b\sin^2\phi$ haben wir $dx=2(b-a)\sin\phi\cos\phi d\phi$, $x-a=(b-a)\sin^2\phi$, $b-x=(b-a)\cos^2\phi$ und $\sqrt{(x-a)(b-x)}=(b-a)\sin\phi\cos\phi$. Daher ist $\int\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx = 2\int d\phi = 2\phi+c = 2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+c$.

(b) Es gilt $\int x^3\ln x dx = \frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+c$,

(c) Es gilt $\int\arctan x dx = x\arctan x-\int x d(\arctan x) = x\arctan x-\int\frac{x}{x^2+1}dx = x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$.

Aufgabe G3 (Flächeninhalt)

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die von den Graphen der Parabel $y=x^2-2x+3$, der Tangente an den Graphen der Parabel an der Stelle $(2,3)$ und der Geraden $x=0$ eingeschlossen wird.



Lösung:
Die Tangente an den Graphen der Parabel $y = x^2 - 2x + 3$ an der Stelle $(2, 3)$ ist $y(x) = 2x - 1$. Der gesuchte Flächeninhalt F ist

$$F = \int_0^2 (x^2 - 2x + 3)dx - \int_0^2 (2x - 1)dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)dx = \int_0^2 (x - 2)^2 d(x - 2) =$$

$$\frac{(x-2)^3}{3}\Big|_0^2 = 0 - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{8}{3}.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Partielle Integration, Substitutionsregel)
Bestimme folgende Integrale

(a) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$ mit $|a| \leq |x|$. Substitution $x = a\cosh t$.

(b) $\int e^{ax}\cos bx dx$ und $\int e^{ax}\sin bx dx$.

Lösung:

(a) Mit Substitution $x = a\cosh t$ haben wir $dx = a\sinh t dt$ und $\sqrt{x^2 - a^2} = a\sinh t$. Dann ist $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int dt = t + c$. Da $t = \operatorname{arcosh}\frac{x}{a} = \ln(\frac{x}{a} + \sqrt{(\frac{x}{a})^2 - 1})$ ist $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + c$. (Hier haben wir verwendet, dass $\ln ax = \ln a + \ln x$ ist).

(b) Es gilt $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx$ und $\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx$. Daraus folgt, dass $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + c$ und $\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + c$ ist.

Aufgabe H2 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Der Mittelwert der auf $[a, b]$ integrierbaren Funktion $f(x)$ ist $M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Bestimme den Mittelwert M für die Funktionen: $f_1(x) = \sin x$ auf $[a, b] = [0, \pi]$, $f_2(x) = x^2$ auf $[a, b] = [0, 1]$ und $f_3(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ auf $[a, b] = [-1, 1]$. Kann man für jede von diesen Funktionen ein $\xi \in (a, b)$ finden, so dass $f(\xi) = M$ ist?

Lösung: Der Mittelwert M_1 der Funktion $f_1(x) = \sin x$ auf $[0, \pi]$ ist $M_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d(\cos x) = \frac{2}{\pi}$. Der Mittelwert M_2 der Funktion $f_2(x) = x^2$ auf $[0, 1]$ ist $M_2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

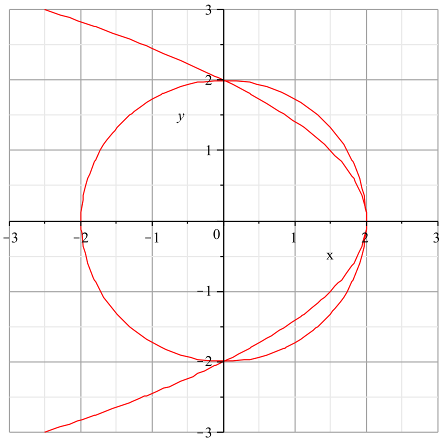
Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung für jede von den beiden Funktionen f_1 und f_2 lässt sich ein $\xi_i \in (a,b), i = 1,2$ finden, so dass $M_i = f_i(\xi_i), i = 1,2$ ist.

Der Mittelwert M_3 der Funktion $f_3(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ ist $M_3 = \frac{1}{2}(-\int_{-1}^{0} dx + \int_0^1 dx) = 0$. Für diese Funktion kann man den Mittelwertsatz der Integralrechnung nicht anwenden, da sie nicht stetig auf $[-1,1]$ ist. Es lässt sich auch kein $\xi \in (a,b)$ finden, so dass $M_3 = f_3(\xi)$ ist, weil $M_3 = 0$ und $f_3(x) \neq 0$ für alle $x \in [-1,1]$ ist.

Aufgabe H3 (Flächeninhalt)

Bestimme jeweils den Flächeninhalt der drei Teile, in die die Parabel $y^2 = a(a-x),\ a > 0$ den Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ schneidet.
Hinweis: $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{\pi a^2}{4}$.

Lösung:



Der Kreis wird in drei Teile mit den Flächeninhalten S_1, S_2, S_3 geschnitten. Seien S_1 und S_2 die Flächeninhalte von den zwei Teilen, die gleich gross sind. Dann ist

$$S_1 = S_2 = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx - \int_0^a \sqrt{a^2 - ax}dx = \frac{\pi a^2}{4} + \frac{1}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - ax}d(a^2 - ax) = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{2a^2}{3}.$$

Daraus folgt, dass

$$S_3 = \pi a^2 - 2S_1 = \frac{\pi a^2}{2} + \frac{4a^2}{3}$$

ist.