Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Math. N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
27. Januar 2010

11. Übungsblatt zur „Mathematik I für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Regeln von de l'Hospital)

Bestimme folgende Grenzwerte mit der Regel von de l'Hospital:

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2}$,

(c) $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

Lösung:

(a) Es ist $\lim_{x\to\infty} \ln x = \lim_{x\to\infty} x = \infty$; wir wenden L'Hospital an: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$.

(b)

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} (= \infty \text{ durch } \infty) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0.$$

(c) Wir formen zunchst um: $x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$. Also ist $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x \ln x}$, da die Exponentialfunktion stetig ist. Um nun auf $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$ l'Hospital anzuwenden, müssen wir den Ausdruck erst in die Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ bringen. Dazu

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(-1)x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

Also ist $\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$.

Aufgabe G2 (Umkehrfunktion)

(a) Berechne die Ableitung der Funktion $g(x) = e^{\sqrt{x}} + \sqrt{e}\ln(x),\ D(g) = (0, \infty)$.

(b) Untersuche, ob g eine differenzierbare Umkehrfunktion g^{-1} besitzt und bestimme gegebenenfalls $(g^{-1})'(e)$.

Lösung:

(a) $g'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{e}}{x}$.

(b) Wegen $g'(x) > 0$ für alle $x \in D(g)$, existiert (nach Satz 18.7) eine differenzierbare Umkehrfunktion g^{-1}.
Es gilt $g^{-1}(e) = 1$. Mit Satz 18.7 folgt nun für die Ableitung der Umkehrfunktion in π

$$\begin{aligned}(g^{-1})'(e) &= \frac{1}{g'(g^{-1}(e))} = \\ &= \frac{1}{g'(1)} = \\ &= \frac{1}{\frac{e}{2} + \sqrt{e}} = \frac{2}{e + 2\sqrt{e}}.\end{aligned}$$

Aufgabe G3 (Reihen)

Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x}{n})^n, \ x > 0$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{9n^2-1}$.

Lösung:

(a) Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}(n!)^2}{((n+1)!)^2 n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)^2 n^n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^n \frac{n+1}{(n+1)^2} \\ = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \frac{1}{(n+1)} = e \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Daher ist die Reihe konvergent.

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{x}{n})^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0 < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe.

(c) Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{9n^2-1} = \frac{1}{3n-1} = 0$. Da $n+1 > n$ gilt, ist auch $a_{n+1} = \frac{1}{3(n+1)-1} < \frac{1}{3n-1} = a_n$. Daher ist die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend. Die Reihe ist konvergent nach dem Leibniz-Kriterium.

Hausübung

Aufgabe H1 (Regeln von de l'Hospital)

(1+1+1 Punkt)

Berechne folgende Grenzwerte.

(a) (1^∞): $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}, \ 0 < x < \pi$,

(b) (0^0): $\lim_{x\to 0} x^{\sin x}, \ x > 0$,

(c) (∞^0): $\lim_{x\to +\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}, \ x > 1$.

Lösung:

(a) (1^∞): Es gilt $f^g = e^{g\cdot\ln f}$. Wir untersuchen jetzt $e^{g\cdot\ln f}$. Da die Funktion e^x stetig ist, reicht es, den Grenzwert für $g\cdot\ln f$ zu bestimmen. Es gilt

$$(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{1-\cos x}}.$$

Wir haben mit der Aufgabe G2(e)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{1-\cos x} = [\text{l}'\text{Hospital}] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x} = -\frac{1}{3}.$$

Daher ist $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{-\frac{1}{3}}$

(b) (0^0): Analog zur (c) haben wir $x^{\sin x} = e^{\sin x\ln x}$. Es gilt

$$\lim_{x\to 0}\sin x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = [\text{l}'\text{Hospital}] = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = [\text{l}'\text{Hospital}] =$$

$$-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x - x\sin x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Daher ist $\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = e^0 = 1$.

(c) (∞^0): Es gilt $(\ln x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(\ln x)}{x}}$. Wir haben

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x} = [\text{l}'\text{Hospital}] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\ln x} = 0.$$

Daher ist $\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$.

Aufgabe H2 (Mittelwertsatz)
(**2+2 Punkte**)

(a) Beweise die Ungleichung $e^x \geq 1+x$ für alle $x\in[0,\infty)$ mit Hilfe des Mittelwertsatzes.

(b) Beweise die Ungleichung $\ln x \leq x-1$ für alle $x\geq 1$.

Lösung:

(a) Für $x=0$ ist die erste Ungleichung wahr, sei also $x>0$. Wir wenden den Mittelwertsatz auf das Intervall $[a,b]=[0,x]$ an. Dann gibt es ein $\xi\in(0,x)$ mit

$$\frac{e^x-e^0}{x-0} = e^\xi \Leftrightarrow e^x - e^0 = e^\xi x$$

also $e^x = e^\xi x + 1 \geq x+1$. Dabei gilt die letzte Ungleichung, weil $e^0=1$ und e^x monoton wachsend ist.

(b) Für $x=1$ ist die Ungleichung erfüllt. Sei $x>1$. Setze $y := x-1$. Für $x\geq 1$ ist dann die erste Ungleichung auf y anwendbar: $e^y\geq y+1$. Auf beiden Seiten können wir dann die ln Funktion anwenden, da ln streng monoton wachsend ist, haben wir $\ln e^y \geq \ln(y+1)$ also $x-1 = y \geq \ln(y+1) = \ln x$.

Aufgabe H3 (Reihen)
(**1+1+1 Punkt**)
Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{k=1}^\infty \frac{2^k}{\sqrt{k!}}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{n})^{n^2}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

Lösung:

(a) Wir verwenden das Quotientenkriterium:

$$\frac{2^{k+1}}{\sqrt{(k+1)!}} \cdot \frac{\sqrt{k!}}{2^k} = \frac{2}{\sqrt{k+1}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

Also konvergiert die Reihe.

(b) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(\frac{n+1}{n})^{n^2}|} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^n = e > 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium ist diese Reihe divergent.

(c) Aus den Ungleichungen

$$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} &= (\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) \\
&\leq (\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}) \\
&= (n+2)-(n+1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

folgt, dass die Reihe nach dem Satz von Leibnitz konvergent ist.

Das ist die letzte Hausübung, die bewertet wird!