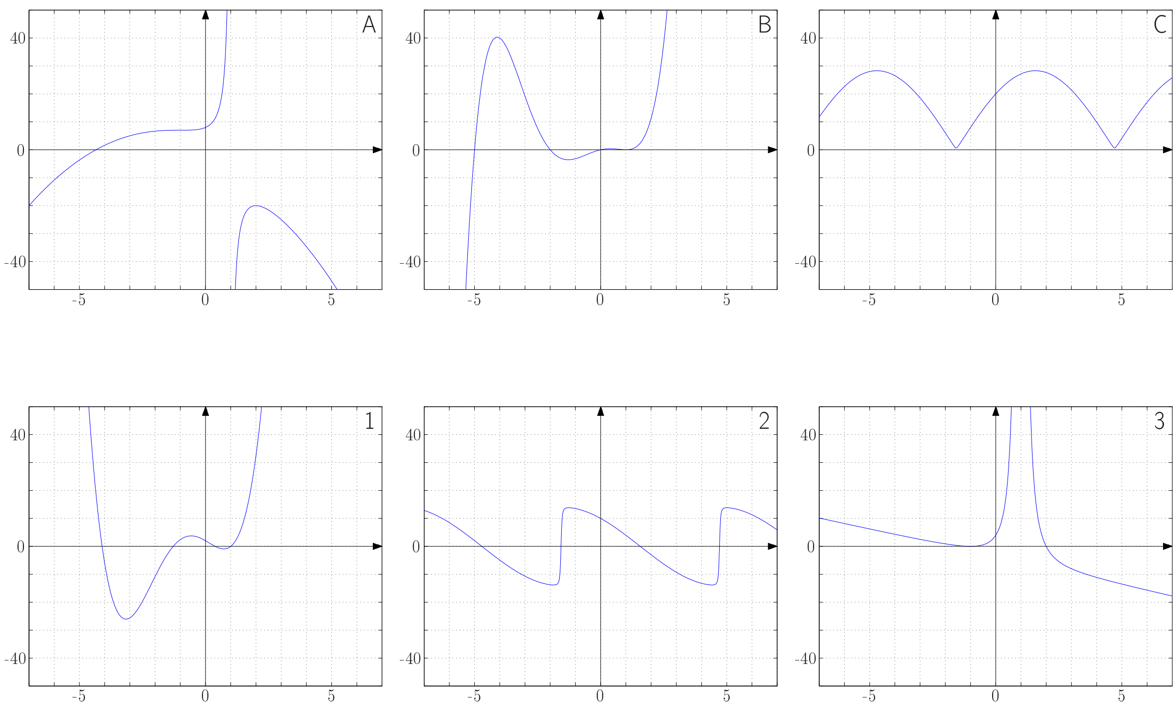
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Math. N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
WS 2009/10
20. Januar 2010

10. Übungsblatt zur „Mathematik I für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss"

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Graphische Darstellung von Ableitungen)
Ordne jeweils eine mit Buchstaben kodierte Funktion ihrer mit Zahlen kodierten Ableitung zu.



Lösung: Es sind die Paare A-3, B-1 und C-2.

Aufgabe G2 (Regeln von de l'Hospital)
Bestimme folgende Grenzwerte mit der Regel von de l'Hospital:

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{4x^2-8x}{x^2-x-2}$,

(b) $(\infty - \infty)$: $\lim_{x\to 0}(\cot^2 x - \frac{1}{x^2})$.

Lösung:

(a) $\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-8x}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{8x-8}{2x-1} = \frac{8}{3}$

(b) $(\infty-\infty)$: Es gilt $f-g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{f}-\frac{1}{g}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}}$. Damit haben wir $\infty-\infty$ zu der Form $\frac{0}{0}$ gebracht.

Wir haben $\cot^2 x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2\cos^2 x - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \frac{x\cos x+\sin x}{x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\cos x + \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = [\text{l'Hospital}] = 1 + \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 2.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x} = [\text{l'Hospital}] = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin^2 x + 2x\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\frac{\sin x}{x}+2\cos x} = -\frac{1}{3}.$$

Daher gilt

$$\lim_{x\to 0}(\cot^2 x - \frac{1}{x^2}) = -\frac{2}{3}.$$

Aufgabe G3 (Reihen)

Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$,

(b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$,

(c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{3^k}$.

Lösung:

(a) Die Reihe divergiert, da $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ eine Minorante ist.

(b) Es gilt

$$\frac{k!}{k^k} = \frac{k\cdot(k-1)\cdots 2\cdot 1}{k\cdot k\cdot\cdots\cdot k\cdot k} \le \frac{k\cdot k\cdots k\cdot 2\cdot 1}{k\cdot k\cdot\cdots\cdot k\cdot k} = \frac{2}{k^2}.$$

Also ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2}$ eine Majorante. Somit konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$.

(c) Wir werden zeigen, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_k := \frac{k!}{3^k}$ keine Nullfolge ist. Damit divergiert die gegebene Reihe.

Es gilt $a_2 = \frac{2}{9} > 0$. Außerdem ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n\ge 2$ monoton wachsend:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} = \underbrace{\frac{n+1}{3}}_{\ge 1}\frac{n!}{3^n} \ge \frac{n!}{3^n} = a_n.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Regeln von de l'Hospital)

(1+1 Punkt)

Berechne folgende Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$,

(b) $(0\cdot\infty)$: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)\tan x$.

Lösung:

(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}(= \text{„0 durch 0“ }) = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)}{3\cos(3x)} = \frac{2}{3}.$$

(b) $(0 \cdot \infty)$ Es gilt $fg = \frac{f}{\frac{1}{g}} = \frac{g}{\frac{1}{f}}$. Auf diese Weise bringt man $0 \cdot \infty$ zur $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$. Es gilt

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x) \tan x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(\frac{\pi}{2} - x)}{\cot x};$$

Da $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ist, haben wir

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(\frac{\pi}{2} - x)}{\cot x} = [\text{l'Hospital}] = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = 1.$$

Aufgabe H2 (Umkehrfunktion)
(1+1 Punkt)
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf dem Interval I differenzierbar mit $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$.

(a) Bestimme die Ableitung der Umkehrfunktion aus der Formel $f(f^{-1}(x)) = x$.

(b) Zeige $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1, 1)$.

Lösung:

(a) Wir differenzieren die Gleichung $f(f^{-1}(x)) = x$. Mit der Kettenregel gilt

$$f(f^{-1}(x))' = f'(f^{-1}(x))(f^{-1}(x))' = 1.$$

Daher ist $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

(b) Sei $f(\xi) = \cos \xi,\ \xi \in (0, \pi)$. Es ist $f'(\xi) = -\sin \xi < 0$. Daher ist die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \arccos x$ differenzierbar mit

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Aufgabe H3 (Extremstellen)
(3 Punkte)
Untersuche das Polynom $f(x) = x^3 + ax^2 + 3bx,\ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ auf lokale Extremstellen.

Lösung: Lokale Extremstellen müssen $f'(x_0) = 0$ erfüllen. Hier $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3b$. Also müssen wir $0 = x^2 + \frac{2}{3}ax + \frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{9} + b$ lösen. Also $x = -\frac{a}{3} \pm \sqrt{\frac{a^2}{9} - b}$. Wir sehen: für $\frac{a^2}{9} < b$ gibt es überhaupt keine Extremstellen, da dann die Wurzel nicht existiert. (1 Punkt) Für $\frac{a^2}{9} = b$ gibt es einen Kandidaten $x_0 = -\frac{a}{3}$. In diesem Fall ist $f'(x) = 3x^2 + 2ax + a^2/3 = 3(x + a/3)^2 \geq 0$. Da die Funktion f ausser in $x = -\frac{a}{3}$ streng monoton steigt, ist $-\frac{a}{3}$ ein Sattelpunkt. (1 Punkt)
Es gilt $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.
Im Fall $\frac{a^2}{9} > b$ liegen daher entweder zwei Sattelpunkte vor oder zuerst (links) ein lokales Maximum, dann ein lokales Minimum. Um dies zu entscheiden, setzen wir eine Stelle zwischen diesen beiden in f' ein. Wegen $-\sqrt{\frac{a^2}{9} - b} - \frac{a}{3} < -\frac{a}{3} < +\sqrt{\frac{a^2}{9} - b} - \frac{a}{3}$ bietet sich $\frac{-a}{3}$ an. Es ist $f'(-\frac{a}{3}) = 3b - \frac{a^2}{3}$. Wir haben $f'(-\frac{a}{3}) < 0$, da $\frac{a^2}{9} > b$. (1 Punkt)
Es gilt also: f hat genau dann zwei Extremstellen, wenn $\frac{a^2}{9} > b$ gilt; für $\frac{a^2}{9} = b$ gibt es einen Sattelpunkt; sonst gibt es nichts.

Aufgabe H4 (Reihen)

(**2+2 Punkte**)

Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+\sqrt{k}}{k^3+2k^2+5k-1}$,

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+\sqrt{k}}{k^3+2k^2+5k-1}$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\frac{k+\sqrt{k}}{k^3+\underbrace{2k^2+5k-1}_{\geq 0}} \quad \leq \quad \frac{k+k}{k^3} = \frac{2}{k^2}.$$

Somit ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{k^2}$ eine Majorante.

(b) Es gilt

$$\frac{k^2+\sqrt{k}}{k^3+2k^2+5k-1} \quad \geq \quad \frac{k^2}{k^3+2k^3+5k^3} = \frac{1}{8k}.$$

Somit ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{k}$ eine Minorante.