Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Math. N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
13. Januar 2010

9. Übungsblatt zur „Mathematik I für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Bisektionsverfahren)
Betrachte die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$$

und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos x.$$

(a) Zeige, daß die Graphen der beiden Funktionen sich schneiden.

(b) Bestimme die Stelle, an der sich die Graphen der Funktionen schneiden mit Hilfe des Bisektionsverfahrens auf eine Nachkommastelle genau.

Lösung:

(a) Betrachte die Funktion

$$h : [0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) - g(x).$$

Offensichtlich schneiden sich die Graphen von f und g im Intervall $[0, 1]$ genau dann, wenn h eine Nullstelle in diesem Intervall besitzt.

Da f und g stetige Funktionen sind, ist auch h stetig (auf dem Intervall $[0, 1]$). Weil $h(0)h(1) = (0^2 - \cos 0)(1^2 - \cos 1) = -(1 - \cos 1) < 0$ gilt, besitzt h nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle im Intervall $(0, 1)$.

(b) Es gilt $h(0.5) \approx -0.627583$. Daher muß im Intervall $(\frac{1}{2}, 1)$ eine Nullstelle liegen.

Weiter gilt $h(0.75) \approx -0.169189$, sodaß eine Nullstelle im Intervall $(\frac{3}{4}, 1)$ liegt.

Da $h(\frac{7}{8}) \approx 0.124628$ gilt, liegt eine Nullstelle im Intervall $(\frac{3}{4}, \frac{7}{8})$.

Weiter gilt $h(\frac{13}{16}) \approx -0.0275293$. Daher muß im Intervall $(\frac{13}{16}, \frac{7}{8})$ eine Nullstelle liegen. Da die Intervalllänge kleiner als $\frac{1}{10}$ ist, ist die geforderte Genauigkeit erreicht.

Aufgabe G2 (Differentiation)
Bestimme mit Hilfe der Differentiationsregeln die Ableitungen folgender Funktionen:

(a) $\sin^4 x + \cos^4 x$;

(b) $\arctan(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x})$, $\quad x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

(c) $\frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2})$, $\quad 0 \leq b < a,\ -\pi < x < \pi$;

(d) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}, \quad a>0,\ -a\le x\le a.$

Lösung:

(a)

$$(\sin^4 x+\cos^4 x)' = 4\sin^3 x\cos x + 4\cos^3 x(-\sin x) = 4\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x) = \\ -2\sin 2x\cos 2x = -\sin 4x;$$

(b)

$$(\arctan(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}))' = \frac{(\sin x-\cos x)^2}{(\sin x-\cos x)^2+(\sin x+\cos x)^2}\cdot \\ \frac{-(\cos x-\sin x)^2-(\cos x+\sin x)^2}{(\sin x-\cos x)^2} = -1;$$

(c)

$$(\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}))' = \frac{2}{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}}\cdot\frac{a+b}{a+b+(a-b)\tan^2\frac{x}{2}}\cdot \\ \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} \\ = \frac{1}{(a+b)\cos^2\frac{x}{2}+(a-b)\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{a+b\cos x};$$

(d)

$$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x}{2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}} = \sqrt{a^2-x^2};$$

Aufgabe G3 (Stetige Fortsetzung, Regel von de l'Hospital)

Bestimme $a\in\mathbb{R}$, so dass die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ auf $D(f)$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}-\cot x, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$$

mit $D(f)=(-\pi,\pi)$.

Lösung:

Die Funktion $f(x)$ ist auf $D(f)\setminus\{0\}$ stetig.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x} = [\text{l'Hosp.}] = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x} = [\text{l'Hosp.}] = \\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x\cos x}{2\cos x - x\sin x} = 0.$$

Daher setzen wir $a=0$.

Aufgabe G4 (Extrema)

Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $D(f)=[-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}]$, definiert durch

$$f(x) = -1+\frac{1}{2}x^2+\cos(x^2).$$

Gebe alle lokalen und globalen Extrema von f im Definitionsbereich an. Bestimme insbesondere die Art der einzelnen Extrema.

Lösung:
Die Funktion f ist gerade, d.h., es ist $f(x) = f(-x)$, es reicht also, nach Extrema in $[0, \sqrt{\pi}]$ zu suchen. Die erste Ableitung berechnet sich zu

$$f'(x) = x + 2x\left(-\sin(x^2)\right) = x(1 - 2\sin(x^2))$$

mit Nullstellen für $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$ und $x = \sqrt{\frac{5\pi}{6}}$. Überprüfung der 2. Ableitung $f''(x) = 1 - 2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2)$ ergibt $f''(0) = 1 > 0$, $f''(\sqrt{\frac{\pi}{6}}) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} < 0$ und $f''(\sqrt{\frac{5\pi}{6}}) = \frac{5\pi}{\sqrt{3}} > 0$. Für die Randpunkte ergibt sich $f(\pm\sqrt{\pi}) = -1 + \frac{\pi}{2} + \cos(\pi) = -2 + \frac{\pi}{2} \approx -0.43$, die Funktionswerte an den kritischen Stellen sind $f(0) = 0$, $f(\pm\sqrt{\frac{\pi}{6}}) = -1 + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,128$ und $f(\pm\sqrt{\frac{5\pi}{6}}) = -1 + \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,56$. Also hat die Funktion in $x = 0$ ein lokales Minimum, in $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{6}}$ je ein globales Maximum, globale Minima in $x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}\pi}$ und in $\pm\sqrt{\pi}$ lokale Maxima.

Hausübung

Aufgabe H1 (Monotonie differenzierbarer Funktionen)
(**4 Punkte**)
Beweise die Ungleichung

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin y}{y}$$

für $0 < x < y < \pi$.

Lösung:
Man muss zeigen, dass die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ auf $(0, \pi)$ monoton fallend ist. Wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in (0, \pi)$ gilt, ist die Aussage bewiesen. (1 Punkt) Es gilt $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. Die Funktion x^2 ist auf $(0, \pi)$ positiv. Sei $\psi(x) = x\cos x - \sin x$. Es gilt $\psi(0) = 0$, $\psi(\pi) = -\pi$ und $\psi'(x) = -x\sin x < 0$ für alle $x \in (0, \pi)$, was bedeutet, dass $\psi(x)$ monoton fallend auf $(0, \pi)$ ist. Daraus folgt, dass $\psi(x) < 0$ für alle $x \in (0, \pi)$ ist. Damit ist bewiesen, dass $f'(x) < 0$ für alle $x \in (0, \pi)$ ist. (3 Punkte)

Aufgabe H2 (Extrema)
(**4 Punkte**)
Bestimme alle lokalen Maxima und Minima und skizziere die Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^x.$$

Verwende dabei $f(x) = x^x = \exp(x \ln x)$.

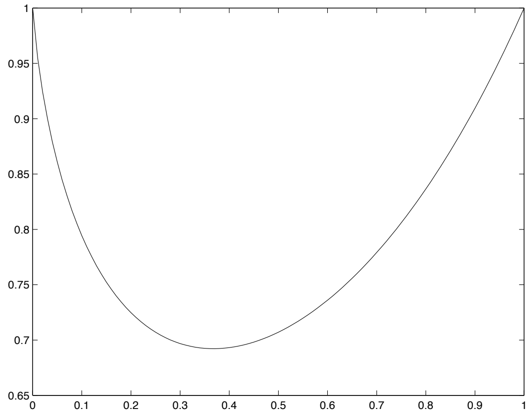
Lösung:
Wir verwenden $f(x) = x^x = \exp(x \ln x)$ und bekommen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp(x\ln x)(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1), \\ f''(x) &= x^x\left(\frac{1}{x} + (\ln x + 1)^2\right). \end{aligned}$$

(1 Punkt)
Da $x^x > 0$ für jedes $x > 0$, gilt

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^x(\ln x + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{e}.$$

(1,5 Punkte)
Deshalb ist $x = \dfrac{1}{e}$ der einzige kritische Punkt von f. Aus $f''(x) > 0$ für alle $x \in]0, \infty[$ folgt, dass f in $x = \dfrac{1}{e}$ ein lokales Minimum hat. (1 Punkt)
Die Skizze von f (0,5 Punkte)



Aufgabe H3 (Regel von de l'Hospital)
(**1+1 Punkt**)
Bestimme die Grenzwerte

(a) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$;

(b) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Lösung:

(a) Wir wenden die Regel von de l'Hospital zwei mal an:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = [\text{l'Hosp.}] = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{-\tan x}{2x}$$
$$= [\text{l'Hosp.}] = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

(b) Aus

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\frac{\ln(\cos x)}{x^2}\right),$$

(i) und Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Aufgabe H4 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
(**2+2 Punkte**)

(a) Bestimme alle Punkte $(x, y(x))$ auf dem Graphen der Funktion $y(x) = x^3$, in denen die Tangente parallel zu der Sekante ist, die die Punkte $(-1, -1)$ und $(2, 8)$ verbindet.

(b) Sei $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a, b) und $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass $f(x)$ konstant auf (a, b) ist.

Lösung:

(a) Wir brauchen alle $x \in \mathbb{R}$, für die

$$y'(x) = \frac{y(2) - y(-1)}{2 - (-1)} = \frac{9}{3} = 3$$

gilt. Es muss gelten $y'(x) = 3x^2 = 3$, woraus folgt, dass $x = \pm 1$ ist. Also sind die gesuchten Punkte $(-1, -1)$ und $(1, 1)$.

(b) Wir nehmen zwei beliebige Punkte $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 \neq x_2$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert ein $\xi \in (x_1, x_2)$, so dass $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi)$ ist. Da $f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in (a, b)$ ist, gilt $f(x_2) = f(x_1)$ für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$, woraus folgt, dass $f(x) = \text{const}$ auf (a, b) ist.