Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Math. N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
16. Dezember 2009

8. Übungsblatt zur „Mathematik I für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Stetigkeit)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei definiert durch

$$f(x) = x\cos(\frac{1}{x}).$$

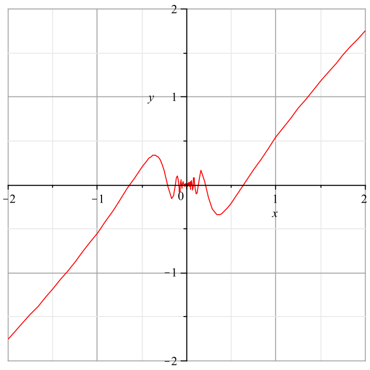
(a) Zeige mit Hilfe des Einschließungskriteriums, daß

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

gilt.

(b) Kann f stetig auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden? Wenn ja, gebe die Fortsetzung $f(0)$ an? Skizziere den Funktionsgraphen.

Lösung:



(a) Es ist offenbar

$$-x \leq x\cos\frac{1}{x} \leq x.$$

Daher gilt es nach dem Einschließungskriterium für Funktionsgrenzwerte auch

$$\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0.$$

(b) Die Funktion f ist in 0 stetig fortsetzbar mit dem Funktionswert 0, da der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} x \cos\frac{1}{x}$$

existiert und gleich 0 ist.

Aufgabe G2 (Stetigkeit)

Die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$ und $D(h) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ seien wie folgt definiert:

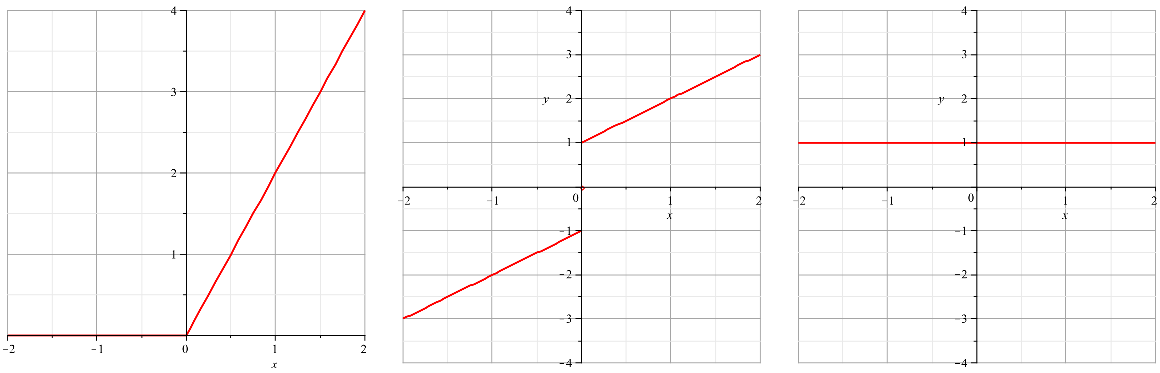
$$f(x) = x + |x|, \quad g(x) = x + \operatorname{sgn} x, \quad h(x) = (\frac{x}{|x|})^2.$$

(a) Skizziere die Graphen von f, g und h.

(b) Berechne jeweils die einseitigen Funktionsgrenzwerte für $x \to 0$. Prüfe dabei, ob auch der Funktionsgrenzwert existiert und gebe gegebenenfalls den entsprechenden Wert an.

(c) Sind die Funktionen f und g im 0 stetig? Ist es möglich, die Funktion h stetig in 0 fortzusetzen?

Lösung:



(a)

(b)

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (x - x) = 0.$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (x + x) = 2 \lim_{x\to -0} x = 0.$$

Damit existiert für $x \to 0$ auch der Funktionsgrenzwert von f und es gilt

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

$$\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0-} (x - 1) = -1.$$

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} (x + 1) = 1.$$

Damit existiert für $x \to 0$ auch der Funktionsgrenzwert von g nicht.

Für $x \neq 0$ ist $h(x) = 1$, also

$$\lim_{x\to 0} h(x) = 1.$$

(c) Die Funktion f ist stetig als Summe stetiger Funktionen. Die Funktion g ist auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ stetig als Summe stetiger Funktionen. Im 0 ist sie nicht stetig, da der Funktionsgrenzwert an dieser Stelle nicht existiert. Da h auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ konstant ist, ist sie auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ stetig. Man kann sie stetig auf $\mathbb{R}$ fortsetzen mit dem Wert $h(0) = 1$.

Aufgabe G3 (Stetige Fortsetzung)
Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = (-9, \infty) \setminus \{0\}$ und

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x}} & \text{für} \quad x > 0, \\ \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt[3]{x}} & \text{für} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 0$ stetig fortsetzbar?

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x}} &= \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3} \\ &= \frac{x+9-9}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+9}+3\right)} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+9}+3} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt[3]{x}} &= \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt[3]{x}} \frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3} \\ &= \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x+9}+3}\,. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$. Somit ist f durch $f(0) := 0$ stetig fortsetzbar.

Hausübung

Aufgabe H1 (Funktionsgrenzwert)
(1+1+1,5+1,5 Punkte)
Berechne die folgenden Funktionsgrenzwerte:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}.$$

Lösung:

(a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1) = n;$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2};$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

(d)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)}$$
$$= -\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x\to 0} \sin x \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x + 1} = 0.$$

Aufgabe H2 (Eigenschaften stetiger Funktionen)
(**1+1+1 Punkt**)
Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründe deine Antwort.

(a) Es existiert eine auf $[a, b]$ stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [a, b]$ und $B(f) = (-\infty, \infty)$.

(b) Es existiert eine auf $[a, b]$ stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [a, b]$ und $B(f) = (c, d)$.

(c) Es existiert eine auf $[a, b]$ stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [a, b]$ und $B(f) = [0, 1] \cup [3, 4]$.

Lösung:

(a) Falsch. Aus dem Satz 16.1 folgt, dass jede auf $[a, b]$ stetige Funktion beschränkt ist.

(b) Falsch. Aus dem Satz vom Maximum folgt, dass jede auf [a,b] stetige Funktion ihr Maximum und Minimum erreicht.

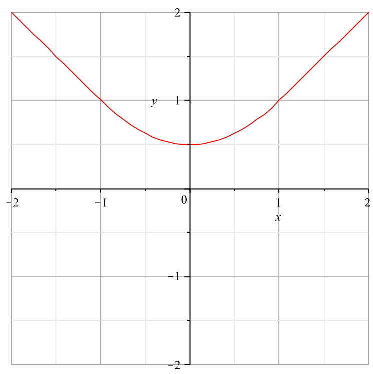
(c) Falsch. Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass die Funktion $f(x)$ alle Werte zwischen 0 und 4 annehmen muss.

Aufgabe H3 (Stetige Fortsetzung)
(**2 Punkte**)
Bestimme ein $a \in \mathbb{R}$ so, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{für } |x| \geq 1, \\ \frac{1}{2}x^2 - a & \text{für } |x| < 1 \end{cases}$$

stetig wird. Zeichne diese Funktion.

Lösung:



Die Funktion f ist auf $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$ stetig, da die Funktionen $|x|$ und $\frac{1}{2}x^2 - a$ stetig sind. Da $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = 1$ ist, braucht man für die Stetigkeit der Funktion f an den Stellen -1 und 1, dass $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = 1/2 - a$ auch gleich 1 ist. Damit ist $a = -1/2$.

Aufgabe H4 (Zwischenwertsatz)
(**3 Punkte**)

Zeige, dass es für jede stetige Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ ein $x_0 \in [0,1]$ mit $f(x_0) = x_0$ gibt.
Hinweis: Betrachte die Funktion $\phi(x) = f(x) - x$.

Lösung: Es gilt $\phi(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$. Auf andere Seite ist $\phi(1) = f(1) - 1 \leq 0$, weil $f(x) \leq 1$ ist. Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass es ein x_0 gibt, so dass $\phi(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0$ ist.