Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Math. N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
9. Dezember 2009

7. Übungsblatt zur „Mathematik I für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Einschließungskriterium)
Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei durch die Vorschrift definiert:

$$a_k = \frac{(k!)^2}{(2k)!} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Zeige:

$$0 \le a_k \le (\frac{1}{2})^k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Bestimme nun den Grenzwert der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Lösung:

$$a_k = \frac{(k!)^2}{(2k)!} = \frac{1\cdot 2\cdot ...\cdot k}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot ...\cdot 2k} = \prod_{m=1}^{k}\frac{m}{k+m} \le [k+m \ge 2m] \le \prod_{m=1}^{k}\frac{m}{2m} = \prod_{m=1}^{k}\frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^k.$$

Wegen $0 \le a_k \le (\frac{1}{2})^k$ folgt nach dem Einschließungskriterium, dass $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Aufgabe G2 (Funktionsgrenzwert)
Berechne (sofern möglich) die folgenden Funktionsgrenzwerte:

$$\lim_{x\to-2}(x^4+3x-4),\quad \lim_{x\to 1}\sqrt[3]{1+x^2},\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1},\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{3+2^{\frac{1}{x}}},\quad \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}.$$

Lösung:

- $\lim_{x\to-2}(x^4+3x-4) = 6$;
- $\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{1+x^2} = \sqrt[3]{2}$;
- $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$;
- Für die Funktion $\frac{1}{3+2^{\frac{1}{x}}}$ berechnen wir erstmal die einseitigen Grenzwerte. Mit $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$ und $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty$ ist $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{3+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{3}$ und $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{3+2^{\frac{1}{x}}} = 0$. Der Grenzwert $\lim_{x\to 0}\frac{1}{3+2^{\frac{1}{x}}}$ existiert also nicht.

- $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x-2}(x+2)} = +\infty.$

Aufgabe G3 (Funktionsgrenzwert)

Die Funktion f sei durch die folgende Vorschrift gegeben:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -1, \\ 0, & x = -1, \\ x^2, & -1 < x \leq 0, \\ -x^2, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Skizziere den Graphen der Funktion f.

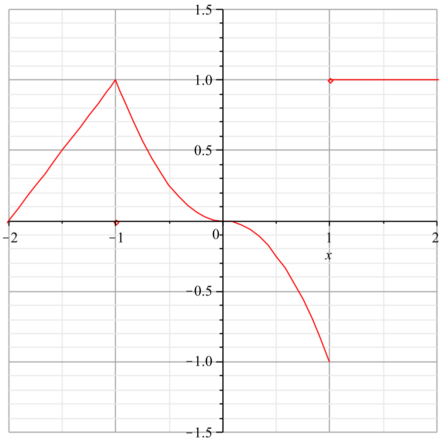
(b) Bestimme den Funktionsgrenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$, falls dieser existiert.

(c) An welchen Stellen x_0 gilt für den existierenden Funktionsgrenzwert

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)?$$

Lösung:

(a) Skizze von der Funktion f



(b) f besitzt einen Funktionsgrenzwert für alle $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, und zwar

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \begin{cases} x_0 + 2, & x_0 \leq -1, \\ x_0^2, & -1 < x_0 \leq 0, \\ -x_0^2, & 0 < x_0 < 1, \\ \text{existiert nicht}, & x_0 = 1, \\ 1, & x_0 > 1. \end{cases}$$

Der Grenzwert an der Stelle $x_0 = 1$ existiert nicht, da $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$ und $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ ist.

(c) An der Stelle $x_0 = -1$ existiert der Funktionsgrenzwert, da $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$, aber $f(-1) = 0$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Einschließungskriterium)
(2 Punkte)
Sei $0 < \alpha < 1$ gegeben. Zeige mit Hilfe des Einschließungskrieriums, dass

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^\alpha - n^\alpha = 0$$

ist. Verwende dabei, dass $(1+\frac{1}{n})^\alpha < (1+\frac{1}{n})$ gilt.

Lösung:

$$0 \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha((1+\frac{1}{n})^\alpha - 1) \leq n^\alpha((1+\frac{1}{n}) - 1) = n^{\alpha-1}.$$

$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1} = 0$, weil $\alpha-1 < 0$ ist. Nach dem Einschlißungskriterium ist $\lim_{n\to\infty}(n+1)^\alpha - n^\alpha = 0$.

Aufgabe H2 (Funktionsgrenzwert)
(1+1+1 Punkt)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 3\}$ und

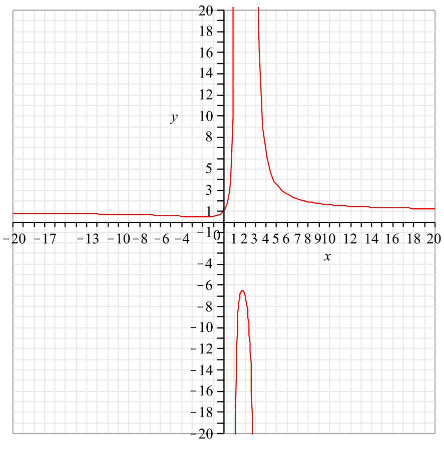
$$f(x) = \frac{(x^2+3)(x^2-2x-3)}{(x^2-1)(x-3)^2}.$$

(a) Vereinfache die Funktion f, bestimme den maximal möglichen Definitionsbereich von f und berechne die einseitigen uneigentlichen Grenzwerte von f jeweils für $x_0 = 1$ und $x_0 = 3$.

(b) Für welche $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert der (eigentliche oder uneigentliche) Funktionsgrenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$? Bestimme für jedes solche x_0 diesen Grenzwert.

(c) Existieren die Grenzwerte $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to\infty} f(x)$?

Lösung:
Skizze von der Funktion f



(a) $f(x) = \frac{x^2+3}{(x-1)(x-3)}$. Der maximal mögliche Definitionsbereich ist $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$. Die einseitigen uneigentlichen Grenzwerte für $f(x)$ sind

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -2 \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -2 \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = \infty,$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 6 \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = \infty, \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 6 \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty.$$

(b) Für $x_0 = 1$ und $x_0 = 3$ existiert der Funktionsgrenzwert nicht, weil die links- und rechtsseitigen Grenwerte nicht übereinstimmen. Für alle anderen $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ existiert der Funktionsgrenzwert:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{x_0^2 + 3}{(x_0 - 1)(x_0 - 3)}.$$

(c)

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = 1.$$

Aufgabe H3 (Funktionsgrenzwert)
(2+2 Punkte)

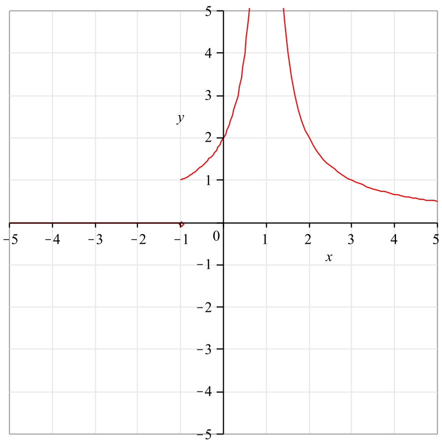
Gegeben seien die Funktionen $f_1 = \frac{|x+1|+x+1}{|x^2-1|}$ und $f_2(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - x - 2$ mit $D(f_1) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ und $D(f_2) = \mathbb{R}$. Untersuche, ob die folgenden Funktionsgrenzwerte (eigentliche oder uneigentliche) existieren und berechne diese im Falle der Existenz.

(a) $\lim_{x \to x_0} f_1(x),\ x_0 \in \{-1, 1, -\infty, +\infty\}$.

(b) $\lim_{x \to x_0} f_2(x),\ x_0 \in \{-2, -\infty, +\infty\}$.

Lösung:

(a) Skizze von der Funktion f_1:



Es gilt

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, & x > -1 \\ -x - 1, & x \leq -1. \end{cases}$$

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1, & |x| \geq 1 \\ -x^2 + 1, & |x| < 1. \end{cases}$$

Dann ist

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ -\frac{2}{x-1}, & |x| < 1 \\ \frac{2}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

Es gilt

$$\lim_{x \to -1^-} f_1(x) = 0, \quad \lim_{x \to -1^+} f_1(x) = 1.$$

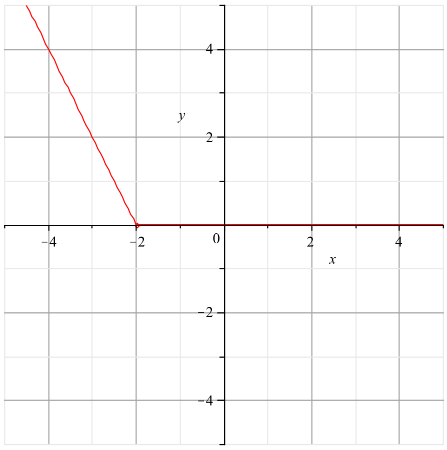
Daher existiert $\lim_{x\to-1} f_1(x)$ nicht. Es gilt

$$\lim_{x\to1^-} f_1(x) = \lim_{x\to1^+} f_1(x) = +\infty.$$

Daraus folgt, dass $\lim_{x\to1} f_1(x) = +\infty$ als uneigentliche Grenzwert existiert. Die Grenzwerte $\lim_{x\to-\infty} f_1(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)$ existieren und

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0.$$

(b) Skizze von der Funktion f_2:



Es gilt

$$f_2(x) = |x+2| - x - 2 = \begin{cases} 0, & x \geq -2 \\ -2x-4, & x < -2. \end{cases}$$

Die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x\to-2^-} f_2(x) = \lim_{x\to-2^+} f_2(x) = 0,$$

woraus folgt, dass $\lim_{x\to-2} f_2(x)$ existiert und gleich 0 ist. Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} f_2(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f_2(x) = +\infty.$$