Prof. H. Alber
Dr. N. Kraynyukova
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
25.11.2009

Mathematik I für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss

6. Übung

Präsenzaufgaben

G17 (**ε-Kriterium**)

Zeige ausführlich, daß die durch

$$a_n := \frac{n}{2n+1}$$

gegebenen Folge $(a_n)_n$ den Grenzwert $a = \frac{1}{2}$ besitzt, d.h., weise nach, daß die Eigenschaft in der Definition aus der Vorlesung erfüllt ist. Gib insbesondere für jedes $\varepsilon > 0$ ein entsprechendes $N(\varepsilon)$ an.

G18 **(Folgen I)**

Untersuche die nachstehenden Folgen jeweils auf Konvergenz und berechne ggf. den Grenzwert.

i) $a_n := 2n - 1, \quad b_n := \frac{3n^2+7}{13n}, \quad c_n := \frac{2n^2+2n+4}{4n^2+3}, \quad d_n := (1 + \frac{1}{n})^{1000}.$

ii) $a_n := 2^n, \quad b_n := \frac{1}{3^n}, \quad c_n := \frac{3^n+1}{3^{2n}-1}.$

iii) $a_n := \sqrt{n}, \quad b_n := \frac{2}{\sqrt{4n}}, \quad c_n := \sqrt[n]{23}.$

G19 **(Selbstgebaute Beispiele)**

Gib jeweils ein Beispiel einer Folge $(a_n)_n$ mit den entsprechenden Eigenschaften an:

i) Die Folge ist monoton steigend und besitzt den Grenzwert 1.

ii) Die Folge ist monoton fallend, es gilt $1 < a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und sie besitzt den Grenzwert 1.

iii) Die Folge ist alternierend, beschränkt und divergent.

iv) Die Folge ist alternierend und konvergent.

G20 **(Folgen II)**

Untersuche die nachstehenden Folgen $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ und $(c_n)_n$ auf Konvergenz und bestimme ggf. die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$ bzw. $\lim_{n\to\infty} c_n$:

$$a_n := \sqrt{2n^2+7} - n\ , \qquad b_n := \sqrt{n(n-1)} - n\ , \qquad c_n := \sqrt{n^2+3n+1} - \sqrt{2n}\ .$$

Hausaufgaben

H19 (ε-Kriterium) **(2 Punkte)**

Zeige ausführlich (wie in Aufgabe G17), daß die durch

$$a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

gegebene Folge $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist.

H20 (Folgen I) **($1+1$Punkt)**

Untersuche die nachstehenden Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ auf Konvergenz und bestimmen ggf. die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$:

$$a_n := \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\ , \qquad b_n := \frac{5n^3 - 3n^2 + 1}{(2n+1)^3} \cdot \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^n \ .$$

H21 (Folgen II) **(2 Punkte)**

Untersuche die nachstehende Folge $(a_n)_n$ auf Monotonie und Konvergenz:

$$a_n := \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \ .$$

Hinweis: Wie kann man die Summe $1+2+3+\cdots+n$ in kompakter Form darstellen?

H22 (Eine rekursive Folge) **($0+2+2+2$ Punkte)**

Wir betrachten die Folge $(x_n)_n$ mit $x_0 := 2$ und der rekursiven Bildungsvorschrift

$$x_{n+1} := \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \ .$$

i) Berechne die ersten 6 Folgenglieder.

ii) Zeige: Liegt x_n im Intervall $[1,2]$, so liegt auch x_{n+1} in diesem Intervall.
Folgere daraus, daß die Folge $(x_n)_n$ beschränkt ist. (*Hinweis:* vollständige Induktion)

iii) Zeige: Falls $(x_n)_n$ einen Grenzwert g besitzt, so gilt $g^2 = 2$.
Beachte, daß damit nicht die Konvergenz der Folge gezeigt ist. Welche Grenzwerte kommen für die Folge in Frage?

iv) Wir zeigen nun, daß die Folge $(x_n)_n$ tatsächlich einen Grenzwert besitzt. Betrachte hierzu die Folge $(y_n)_n$ mit $y_n := x_n - \sqrt{2}$. Zeige, daß $(y_n)_n$ positiv und monoton fallend ist. Folgere daraus die Konvergenz von $(y_n)_n$ und von $(x_n)_n$.

Folgende Grenzwerte sollte man mindestens (ohne Nachschlagen) kennen:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ , \text{ falls } a > 0\ , \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\ , \qquad \lim_{n\to\infty} (1+\tfrac{a}{n})^n = e^a\ ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0\ , \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty\ ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty\ , \text{ falls } a > 1\ , \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = 0\ , \text{ falls } |a| < 1\ ,$$

für eine feste reelle Zahl a und eine feste natürliche Zahl k.
